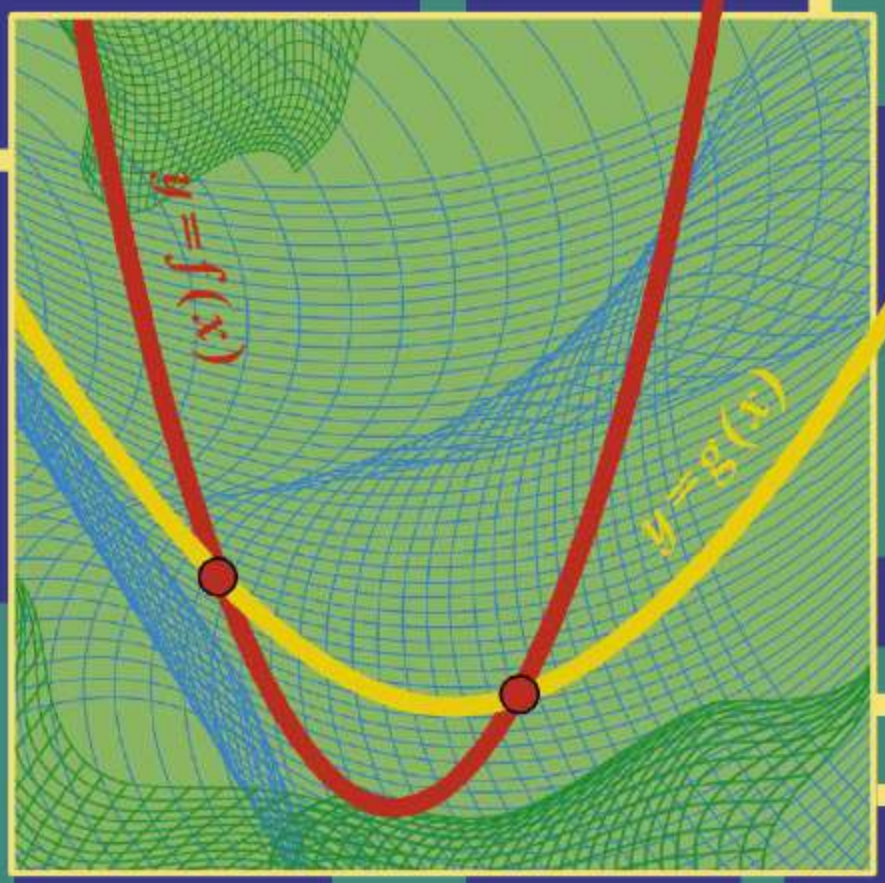
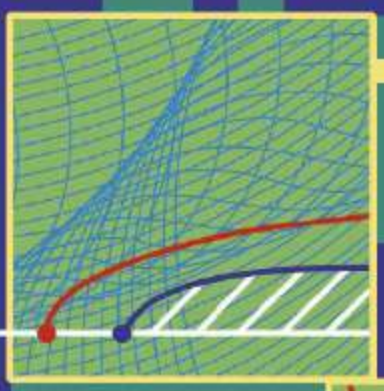
АЛГЕБРА

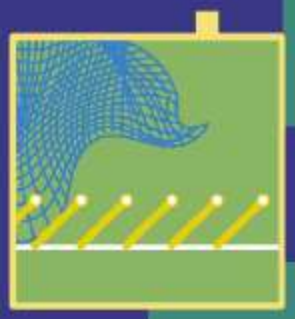
Углублённый уровень



9

А.Г. Мерзляк
В.М. Поляков



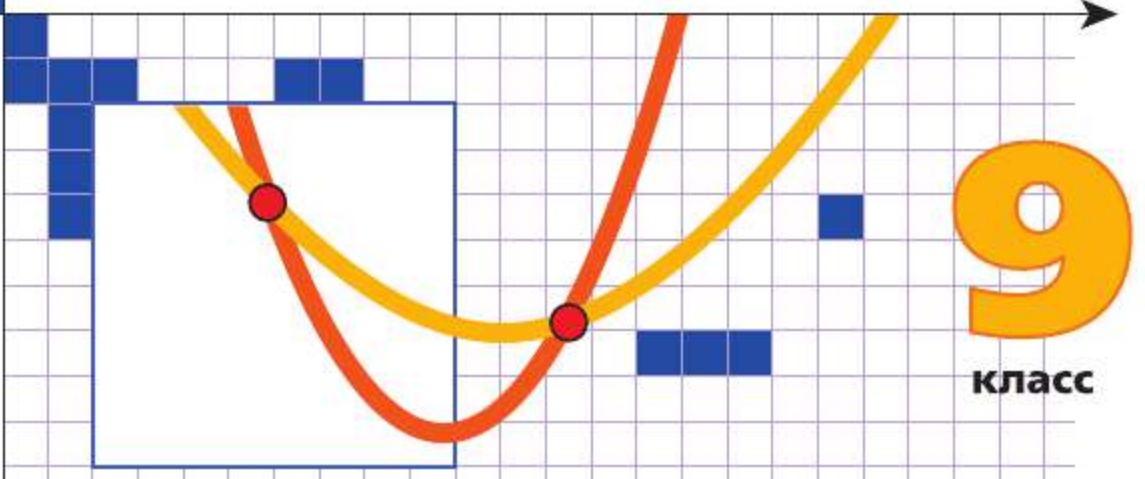


вентана
граф

Российский учебник

А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

АЛГЕБРА



9 класс

Углублённый уровень

Учебник

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

Под редакцией В. Е. Подольского

3-е издание, доработанное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи средней сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

5.6. Задания, рекомендованные для устной работы

5.7. Задания, рекомендованные для домашней работы

глава

1 Квадратичная функция

- В этой главе вы повторите и расширите свои знания о функции и её свойствах.
- Вы научитесь, используя график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.
- Вы узнаете, какую функцию называют квадратичной, какая фигура является её графиком, изучите свойства квадратичной функции.
- Вы научитесь применять свойства квадратичной функции.

§ 1 Функция

В повседневной жизни нам часто приходится наблюдать процессы, в которых изменение одной величины (независимой переменной) влечёт за собой изменение другой величины (зависимой переменной). Изучение этих процессов требует создания их математических моделей. Одной из таких важнейших моделей является **функция**.

С этим понятием вы ознакомились в курсе алгебры 7 класса. Напомним и уточним основные сведения.

Пусть X — множество значений независимой переменной, Y — множество значений зависимой переменной. Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Другими словами, **функция — это правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y.**

Обычно **независимую переменную** обозначают буквой x, **зависимую** — буквой y, **функцию** (правило) — буквой f.

Если рассматривают функцию f с независимой переменной x и зависимой переменной y, то говорят, что переменная y **функционально зависит** от переменной x. Этот факт обозначают так: $y = f(x)$.

Независимую переменную ещё называют **аргументом функции**.

Множество всех значений, которые принимает аргумент, т. е. множество X, называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Так, областью определения обратной пропорциональности $y = \frac{1}{x}$ является множество $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Также можно записать $D(y) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq 0\}$ или $D(y) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

Значение зависимой переменной ещё называют **значением функции**. Значение функции f, которое соответствует значению x_0 аргумента x, обозначают $f(x_0)$. Например, $f(7)$ — это значение функции при $x = 7$. Также принято называть число $f(x_0)$ **значением функции f в точке x_0**.

Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, т. е. множество Y, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$. Так, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0;\ +\infty)$, т. е. $E(y) = [0;\ +\infty)$.

Элементами множеств $D(f)$ и $E(f)$ могут быть объекты самой разнообразной природы.

Так, если каждому многоугольнику поставить в соответствие его площадь, то можно говорить о функции, область определения которой — множество многоугольников, а область значений — множество положительных чисел.

Если каждому человеку поставить в соответствие день недели, в который он родился, то можно говорить о функции, область определения которой — множество людей, а область значений — множество дней недели.

В случае, когда $D(f) \subset \boldsymbol{R}$ и $E(f) \subset \boldsymbol{R}$, функцию f называют **числовой**.

Если областью определения функции f является множество X, а областью значений — множество Y, то функцию f также называют **отображением множества X на множество Y**. Слова «отображение» и «функция» — синонимы. Однако термин «отображение» чаще используют тогда, когда при задании функции хотят подчеркнуть, какие множества являются областью определения и областью значений. Например, нумерация элементов некоторого счётного множества A — это отображение множества $\boldsymbol{N}$ на множество $\boldsymbol{A}$.

На рисунке 1.1 проиллюстрировано отображение множества X на множество Y (точками показаны элементы множеств). В отображении f

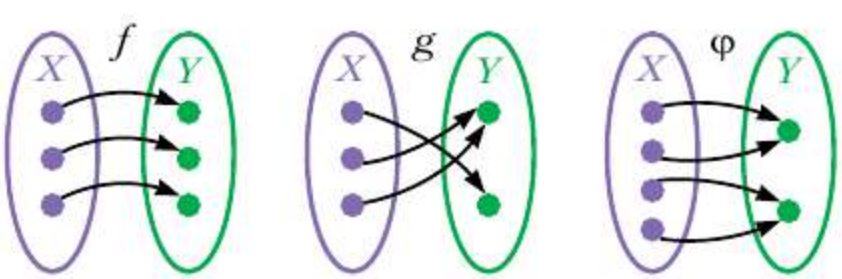


Рис. **1.1**

каждый элемент множества Y является соответствующим некоторому единственному элементу множества X. Такое отображение называют **взаимно однозначным отображением множества X на множество Y.** Отображения g и φ не являются взаимно однозначными отображениями множества X на множество Y.

Например, функция $y = \sqrt{x-1}$ является взаимно однозначным отображением множества $X = [1; +\infty)$ на множество $Y = [0; +\infty)$. Заметим, что функция $y = x^2$ не является взаимно однозначным отображением множества $X = \boldsymbol{R}$ на множество $Y = [0; +\infty)$. Действительно, например, элемент 4 множества Y является соответствующим двум элементам, -2 и 2, множества X.

Функцию считают заданной, если указаны её область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

Рассмотрим несколько примеров функций, заданных описательно.

1. Каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число 0. Функцию, заданную таким образом, называют **функцией Дирихле** и обозначают $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишут:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \boldsymbol{Q}, \\ 0, \text{ если } x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \{0, 1\}$.

2. Каждому действительному числу x поставим в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее число x. Из курса алгебры 7 класса вы знаете, что заданную функцию называют **целой частью числа** x и обозначают $f(x) = [x]$. Например, $f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 1$, $f(2) = [2] = 2$, $f(-\sqrt{2}) = [-\sqrt{2}] = -2$. Заметим, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{Z}$.

3. Каждому действительному числу x поставим в соответствие разность между этим числом и его целой частью. Заданную функцию называют **дробной частью числа** x и обозначают $f(x) = \{x\}$. Имеем: $\{x\} = x - [x]$. Например, $f(\sqrt{2}) = \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$, $f(2) = \{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $f(-\sqrt{2}) = \{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Заметим, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [0; 1)$.

4. Каждому отрицательному действительному числу поставим в соответствие число -1, каждому положительному действительному чис-

лу — число 1, нулю — число 0. Функцию, заданную таким образом, называют **сигнум** (от лат. *signum* — «знак») и обозначают $y = \operatorname{sgn} x$. Пишут:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Заметим, что $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \{-1, 0, 1\}$.

Значение этой функции характеризует знак соответствующего аргумента.

Легко проверить справедливость следующего равенства: $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$. Сделайте это самостоятельно.

5. Рассмотрим функцию f, у которой $D(f) = \boldsymbol{N}$. Будем считать, что $f(n) = 1$, если десятичная запись числа π содержит n цифр 4, идущих подряд, и $f(n) = 0$, если эта запись таким свойством не обладает. Обратим внимание на то, что значения функции f вычислять нелегко. Например, мы не знаем, чему равно $f(10\,000\,000\,000)$. Однако область определения и правило заданы, следовательно, заданной является и сама функция.

Чаще всего функцию задают с помощью формулы. Если при этом не указана область определения, то считают, что областью определения функции является множество значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Например, если функция задана формулой $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, то её областью определения является область определения выражения $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, т. е. промежуток $(1; +\infty)$.

Значения одной функции могут служить значениями аргумента другой функции.

Например, рассмотрим функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$. Тогда $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Следовательно, можно говорить, что формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задаёт функцию $y = f(g(x))$.

Если для любого $x \in M$ все значения функции g служат значениями аргумента функции f, то говорят, что задана **сложная функция** $y = f(g(x))$ с областью определения M.

Существуют функции, которые на разных подмножествах области определения задаются разными формулами. Например,

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Такие функции называют **кусочно заданными.**

Способ задания функции одной или несколькими формулами называют **аналитическим.**

В тех случаях, когда область определения функции является конечным множеством и количество его элементов не очень велико, удобно использовать табличный способ задания функции. Этот способ довольно часто применяют на практике. Так, результатом записи наблюдений за какой-либо характеристикой процесса (температурой, скоростью, давлением и т. п.) является таблица, задающая функциональную зависимость этой величины от времени.

Определение

Графиком числовой функции называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Сказанное означает, что *если некоторая фигура является графиком функции f, то выполняются два условия*:

1) если x_0 — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ принадлежит графику;

2) если $(x_0; y_0)$ — координаты произвольной точки графика, то x_0 и y_0 — соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции f, т. е. $y_0 = f(x_0)$.

Фигура на координатной плоскости может быть графиком некоторой функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки. Например, окружность не может служить графиком никакой функции.

Рис. 1.2

Графический способ задания функции широко используется при исследовании реальных процессов. Существуют приборы, выдающие обработанную информацию в виде графиков. Так, в медицине используют электрокардиограф (рис. 1.2). Этот прибор рисует кривые, характеризующие работу сердца.

Пример 1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2(x-1)}$.

Решение. Область определения данной функции — это множество решений неравенства $x^2(x-1) \geqslant 0$.

Это неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2 = 0, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{array}\right.$

Решением этой совокупности является множество $\{0\} \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$. ■

Пример 2. Найдите область значений функции $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Решение. Пусть a — произвольный элемент области значений данной функции, т. е. $a \in E(y)$. Тогда задача сводится к нахождению всех значений параметра a, при которых уравнение $\dfrac{2x}{1 + x^2} = a$ имеет решения.

Это уравнение равносильно такому:

$2x = a + ax^2$, откуда $ax^2 - 2x + a = 0$.

Если $a = 0$, то полученное уравнение имеет корень $x = 0$. Следовательно, число 0 входит в область значения функции.

Если $a \neq 0$, то это уравнение является квадратным и наличие корней определяется условием $D \geqslant 0$.

Имеем: $D = 4 - 4a^2$. Остаётся решить неравенство $4 - 4a^2 \geqslant 0$. Имеем:

$$4a^2 \leqslant 4,\ a^2 \leqslant 1,\ |a| \leqslant 1.$$

Решением последнего неравенства является промежуток $[-1; 1]$.

Следовательно, $E(y) = [-1; 1]$.

Ответ: $E(y) = [-1; 1]$. ■

Пример 3. Постройте график функции $y = \{x\}$.

Решение. Сначала докажем важные свойства целой и дробной частей числа.

1) Если $k \in \boldsymbol{Z}$, то $[x + k] = [x] + k$.

Пусть $[x] = c$. Тогда по определению целой части числа $c \leqslant x < c + 1$. Отсюда $c + k \leqslant x + k < (c + k) + 1$. Следовательно, $[x + k] = c + k = [x] + k$.

2) Если $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\{x + k\} = \{x\}$.

Имеем: $\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = \{x\}$.

Доказанное свойство дробной части числа показывает, что значение функции $y = \{x\}$ не изменится, если к её аргументу прибавить целое число. А этот факт, в свою очередь, позволяет утверждать, что на каждом из промежутков вида $[k; k + 1)$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, график функции $y = \{x\}$ имеет одинаковый вид. Поэтому достаточно построить его, например, на промежутке $[0; 1)$, а потом полученную фигуру «размножить».

Если $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ и $\{x\} = x - [x] = x$, т. е. при $x \in [0; 1)$ имеем $y = x$.

Искомый график изображён на рисунке 1.3. ■

Обратим внимание, что свойство 2 функции $y = \{x\}$ позволяет отнести эту функцию к классу так называемых **периодических функций**. Говорят, что любое целое число, отличное от нуля, является её периодом. Более подробно с периодическими функциями вы ознакомитесь в 10 классе.

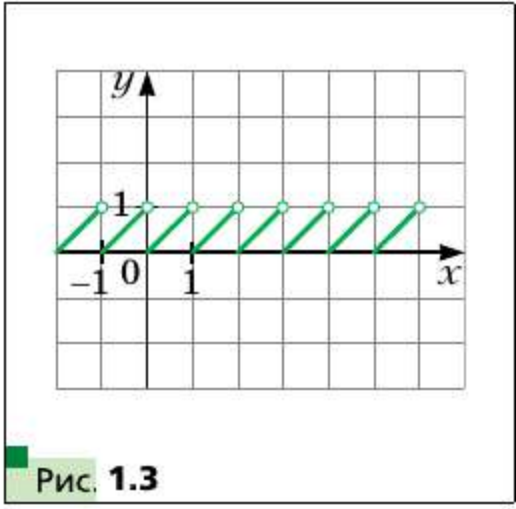


Рис. 1.3

Пример 4. Найдите все функции f такие, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(2x - 1) = x^2$.

Решение. Пусть $2x - 1 = t$. Поскольку переменная x принимает любые действительные значения, то и переменная t тоже принимает любые действительные значения. Имеем: $x = \dfrac{t+1}{2}$. Тогда $f(t) = \left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2$ для любого $t \in \boldsymbol{R}$.

Мы установили, что если функция f, удовлетворяющая условию $f(2x - 1) = x^2$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, существует, то она имеет вид $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$. Осталось показать, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

Имеем: $D(f) = \boldsymbol{R}$ и $f(2x-1) = \left(\dfrac{(2x-1)+1}{2}\right)^2 = x^2$.

Ответ: $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$. ■

1. Что называют функцией?
2. Как записывают, что переменная y функционально зависит от переменной x?
3. Что называют аргументом функции?
4. Что называют областью определения функции и как её обозначают?
5. Что называют значением функции?
6. Что называют областью значений функции и как её обозначают?
7. Какую функцию называют числовой?
8. Что называют отображением множества X на множество Y?
9. Какое отображение называют взаимно однозначным отображением множества X на множество Y?
10. Что надо указать, чтобы функция считалась заданной?
11. Назовите способы задания функции.
12. Что называют графиком функции?

Упражнения

1.1. Каждому натуральному числу, которое больше 10, но меньше 20, поставили в соответствие остаток от деления этого числа на 5.

1) Каким способом задана эта функция?

2) Какова область значений этой функции?

3) Задайте эту функцию таблично.

1.2. Заполните таблицу.

Значение аргумента x	Значение функции		
	$f(x) = [x]$	$g(x) = \{x\}$	$\varphi(x) = \mathfrak{D}(x)$
3,2			
–3,2			
$\sqrt{3}$			
$-\sqrt{3}$			

1.3. Найдите, не выполняя построения, точки пересечения графика функции с осями координат:

1) $f(x) = \dfrac{20 + 4x}{3x - 5}$; 2) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

1.4. Найдите, не выполняя построения, точки пересечения графика функции с осями координат:

1) $h(x) = 9 - 10x$; 2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$; 3) $s(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

1.5. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} 9, \text{ если } x \leqslant -3, \\ x^2, \text{ если } -3 < x < 1, \\ x, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

1.6. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, \text{ если } x < -2, \\ -x, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

1.7. Постройте график функции $y = \operatorname{sgn} x$.

1.8. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 7}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{4x-3}{x^2 - 7x + 6}$.

1.9. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{2}{x+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{8-x} + \dfrac{4}{x^2 - 8x}$.

1.10. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$; 4) $f(x) = |x + 2| + 2$;

2) $f(x) = 5 - x^2$; 5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

3) $f(x) = -7$; 6) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

1.11. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = x^2 + 3$; 2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

1.12. Какая из функций является взаимно однозначным отображением множества $D(y)$ на множество $E(y)$:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = |x|$; 3) $y = \sqrt{x}$?

1.13. Какая из функций является взаимно однозначным отображением множества $D(y)$ на множество $E(y)$:

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 2$?

1.14. Каждому многоугольнику поставили в соответствие его периметр. Является ли описанное отображение множества многоугольников на множество положительных действительных чисел взаимно однозначным?

1.15. Даны функции $f(x) = 1 - 3x$ и $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулой функцию:

1) $y = f(x + 1)$; 2) $y = g(f(x))$; 3) $y = f(f(x))$.

1.16. Даны функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ и $g(x) = x^2 - 2x$. Задайте формулой функцию:

1) $y = g(-x)$; 2) $y = f(g(x))$; 3) $y = g(g(x))$.

1.17. Задайте формулой какую-нибудь функцию, областью определения которой является:

1) множество действительных чисел, кроме чисел 1 и 2;
2) множество всех чисел, которые не меньше 5;
3) множество всех чисел, которые не больше 10, кроме числа -1;
4) множество, состоящее из одного числа -4.

1.18. Найдите область определения функции и постройте её график:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$; 2) $f(x) = \dfrac{12x - 72}{x^2 - 6x}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$.

1.19. Найдите область определения функции и постройте её график:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x}$.

1.20. Функция f задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления этого числа на 3. Найдите $f(2)$, $f(0)$, $f(-17)$, $f(21)$. Найдите $E(f)$. Докажите, что $f(x) = f(x + 3)$ для любого $x \in \boldsymbol{Z}$.

1.21. Функция g задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления этого числа на 4. Найдите $g(3)$, $g(0)$, $g(-21)$, $g(32)$. Найдите $E(g)$. Докажите, что $g(x) = g(x + 4)$ для любого $x \in \boldsymbol{Z}$.

1.22. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{4 - |x|} + \dfrac{1}{x + 2}$;

2) $y = \sqrt{|x| - 3} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$;

3) $y = \sqrt{(x - 1)^2 (x - 2)}$;

4) $y = \sqrt{|x + 1|\,(x - 3)}$;

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 (x + 2)}}$;

6) $y = \sqrt{\operatorname{sgn} x}$.

1.23. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - |x|}} + \dfrac{1}{x - 2}$;

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - 1}} + \sqrt{x + 4}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x + 1)^2 (x + 3)}}$;

4) $y = \sqrt{(x + 4)^2 (x - 3)}$;

5) $y = \sqrt{|x + 5|\,(x + 2)}$;

6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn} x}}$.

1.24. Найдите область значений функции:

1) $y = -2x^2 + 3x - 4$; 2) $y = \dfrac{3x + 1}{2x + 3}$; 3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

1.25. Найдите область значений функции:

1) $y = 5x^2 - x + 1$; 2) $y = \dfrac{2x - 1}{5x + 4}$; 3) $y = 4x + \dfrac{1}{x}$.

1.26. Постройте график функции $y = \left(\sqrt{(x + 2)^2 x}\right)^2 - x^3 - 4x^2$.

1.27. Известно, что $D(f) = [-1; 4]$. Найдите область определения функции:

1) $y = f(-x)$; 3) $y = f(1 - x)$; 5) $y = f(|x|)$;

2) $y = f(2x)$; 4) $y = f(x^2)$; 6) $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.28. Известно, что $D(g) = [-9; 1]$. Найдите область определения функции:

1) $y = g(x + 1)$; 3) $y = g(x^2)$; 5) $y = g(\sqrt{x})$;

2) $y = g\left(\frac{1}{3}x\right)$; 4) $y = g(|x|)$; 6) $y = g\left(\frac{1}{x}\right)$.

1.29. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{\mathfrak{D}(x)}$; 3) $y = \frac{1}{(x)}$; 5) $y = \sqrt{\mathfrak{D}(x) - 1}$.

2) $y = \frac{1}{[x]}$; 4) $y = \sqrt{-\mathfrak{D}(x)}$;

1.30. Найдите область значений функции:

1) $y = \mathfrak{D}([x])$; 2) $y = \mathfrak{D}(\{x\})$; 3) $y = x\mathfrak{D}(x)$.

1.31. Найдите область значений функции:

1) $y = [\mathfrak{D}(x)]$; 2) $y = \{\mathfrak{D}(x)\}$.

1.32. Постройте график функции:

1) $y = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(x))$; 2) $y = \{[x]\}$; 3) $y = \sqrt{1 - [x]^2}$.

1.33. Постройте график функции:

1) $y = [\{x\}]$; 2) $y = \sqrt{\{x\}(\{x\} - 1)}$.

1.34. Постройте график функции:

1) $y = \operatorname{sgn}(x + 1)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$.

1.35. Постройте график функции:

1) $y = \operatorname{sgn}(1 - x)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$.

1.36. Функция задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления квадрата этого числа на 5. Постройте график этой функции.

1.37. Функция задана описательно: каждому целому числу поставлен в соответствие остаток от деления квадрата этого числа на 3. Постройте график этой функции.

1.38. Каждому действительному числу поставили в соответствие ближайшее к нему на координатной прямой целое число. Является ли описанная зависимость функциональной?

1.39. Каждому действительному числу поставим в соответствие расстояние до ближайшего к нему на координатной прямой целого числа. Является ли описанная зависимость функциональной?

1.40. Найдите функцию f такую, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(3x - 1) = x + 2$.

1.41. Найдите функцию g такую, что $D(g) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $g(4 - x) = 3x + 1$.

1.42. Дана функция $f(x) = \frac{1}{1 - x}$. Постройте график функции $y = f(f(f(x)))$.

1.43. Найдите функцию f такую, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(x) + 2f(-x) = x + 1$.

1.44. Найдите функцию f такую, что $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$.

1.45. Найдите функцию f такую, что $D(f) = \boldsymbol{R}$ и для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $2f(x) - f(1 - x) = x + 3$.

1.46. Дана функция $f(x) = x^2 + 2x$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = 0$.

1.47. Дана функция $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = x$.

1.48. Дана функция $f(x) = x^2 - x + 1$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

Упражнения для повторения

1.49. Решите уравнение $|2x - 1| = x + 2$.

1.50. Постройте график уравнения $\frac{y - x^2}{x^2 - x} = 0$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Из истории развития понятия функции

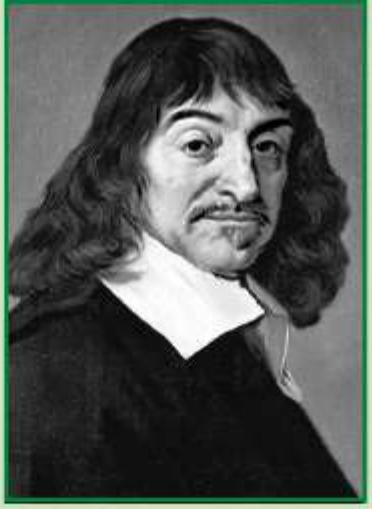
Определение функции, которым вы пользуетесь на данном этапе изучения математики, появилось сравнительно недавно — в конце XIX в. Оно формировалось более 200 лет под влиянием бурных споров выдающихся математиков нескольких поколений.

Исследованием функциональных зависимостей между величинами начали заниматься ещё учёные древности. Этот поиск нашёл отражение в открытии формул для вычисления площадей и объёмов некоторых фигур. Примерами табличного задания функций могут служить астрономические таблицы вавилонян, древних греков и арабов.

Однако лишь в первой половине XVII в. открытием метода координат выдающиеся французские математики Пьер Ферма (1601–1665) и Рене Декарт (1596–1650) заложили основы для возникновения понятия функции. В своих работах они исследовали изменение ординаты точки в зависимости от изменения её абсциссы.

Важную роль в формировании понятия функции сыграли работы великого английского учёного Исаака Ньютона (1643–1727). Под функцией он понимал величину, которая изменяет своё значение с течением времени.

Пьер
Ферма

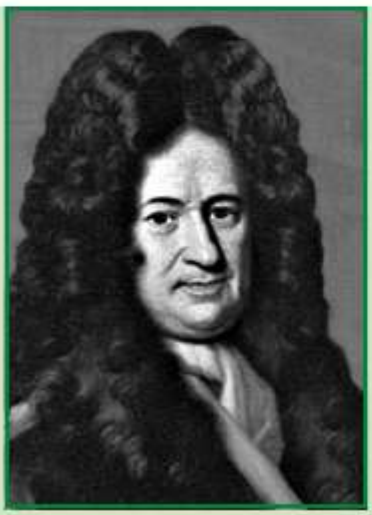


Рене
Декарт

Исаак
Ньютон

Термин «функция» (от лат. *functio* — «совершение», «выполнение») ввёл немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Он и его ученик, швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667–1748), под функцией понимали формулу, связывающую одну переменную с другой, т. е. отождествляли функцию с одним из способов её задания.

Дальнейшему развитию понятия функции во многом способствовал поиск истины в многолетнем споре выдающихся математиков Леонарда Эйлера (1707–1783) и Жана Лерона Д'Аламбера (1717–1783), одним из предметов которого было определение сути этого понятия. В результате был сформирован более общий взгляд на функцию как зависимость одной переменной величины от другой, в котором это понятие жёстко не связывалось со способом задания функции.



Готфрид
Лейбниц

Иоганн
Бернулли

Леонард
Эйлер

Жан Лерон Д'Аламбер

Николай Лобачевский

Петер Дирихле

В 30-х г. XIX в. идеи Эйлера получили дальнейшее развитие в работах выдающихся учёных: русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856) и немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805–1859). Именно тогда появилось такое определение: *переменную величину y называют функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное значение величины y*.

Такое определение функции можно и сегодня встретить в школьных учебниках. Однако более современный подход — это трактовка функции как *правила, с помощью которого по значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной*.

Когда на рубеже XIX и XX вв. возникла теория множеств и стало понятно, что элементами области определения и области значений совсем не обязательно должны быть числа, то под функцией стали понимать *правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y*.

С помощью понятия множества можно дать определение функции, не используя термин «правило».

Если множества X и Y — соответственно область определения и область значений функции f, то тем самым задаётся множество

$$\{(x; y) \mid x \in X, y \in Y, y = f(x)\}.$$

Упорядоченные пары, составляющие это множество, характеризуются тем, что у них первые компоненты различны.

Справедливо и обратное утверждение: любое множество упорядоченных пар, первые компоненты которых различны, задаёт некоторую функцию, область определения которой — множество первых компонентов пар, область значений — множество вторых компонентов пар. Правило, которое

каждому элементу области определения ставит в соответствие единственный элемент области значений, определяется самими упорядоченными парами.

Сказанное показывает, что можно принять такое определение.

Определение

Функция — это множество упорядоченных пар с неравными первыми компонентами.

Так, множество $\{(1; 3), (5; -7), (2; 6), (-3; 6)\}$ является некоторой функцией f, у которой $D(f) = \{1, 5, 2, -3\}$, $E(f) = \{3, -7, 6\}$. Пишут $f = \{(1; 3), (5; -7), (2; 6), (-3; 6)\}$. Из этой записи, например, следует, что $f(5) = -7$.

Например, множества f и g, где $f = \{(x;\ 2x - 1) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$, $g = \{(x;\ \frac{1}{x}) \mid x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}\}$, являются соответственно линейной функцией и обратной пропорциональностью.

§ 2 Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

Часто о свойствах объекта можно судить по его изображению: фотографии, рентгеновскому снимку, рисунку и т. п.

«Изображением» функции может служить её график. Покажем, как график функции позволяет определить некоторые её свойства.

На рисунке 2.1 изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Её областью определения является промежуток $[-4; 7]$, а областью значений — промежуток $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значения функции равны нулю.

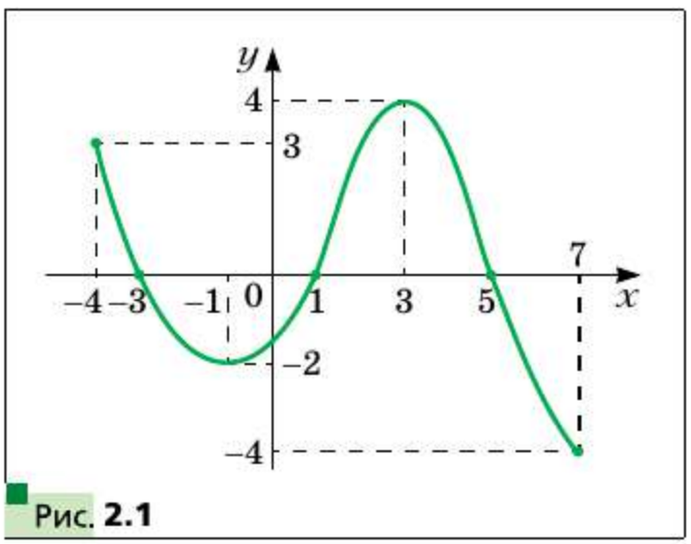


Рис. 2.1

Определение

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулём функции.

Так, числа -3, 1, 5 являются нулями данной функции.

Заметим, что на промежутках $[-4; -3)$ и $(1; 5)$ график функции f расположен над осью абсцисс, а на промежутках $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ — под

осью абсцисс. Это означает, что на промежутках $[-4; -3)$ и $(1; 5)$ функция принимает положительные значения, а на промежутках $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ — отрицательные.

Определение

Промежуток, на котором функция принимает значения одинакового знака, называют промежутком знакопостоянства функции.

Промежутки $[-4; -3)$, $(1; 5)$, $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ являются промежутками знакопостоянства рассматриваемой функции. Отметим, что, например, промежутки $(0; 5)$ и $[1; 5)$ не являются промежутками знакопостоянства данной функции.

Замечание. Решая задачу на поиск промежутков знакопостоянства функции, указывают те промежутки, которые не являются собственными подмножествами никаких других промежутков знакопостоянства. Например, на промежутке $(-2; -1)$ функция f принимает отрицательные значения (см. рис. 2.1), но в ответ следует включить промежуток $(-3; 1)$, содержащий промежуток $(-2; -1)$.

С увеличением x от -4 до -1 график функции «идёт вниз», т. е. значения функции уменьшаются. Говорят, что на промежутке $[-4; -1]$ **функция является убывающей.** С увеличением x от -1 до 3 график функции «идёт вверх», т. е. значения функции увеличиваются. Говорят, что на промежутке $[-1; 3]$ **функция является возрастающей.**

Определение

Функцию f называют возрастающей на множестве $M \subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение

Функцию f называют убывающей на множестве $M \subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Часто используют иную формулировку.

Определение

Функцию f называют возрастающей (убывающей) на множестве $M \subset D(f)$, если для любых значений аргумента из этого множества большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Если функция возрастает (убывает) на всей области определения, то её называют **возрастающей (убывающей)**.

Например, на рисунке 2.2 изображён график функции $y = \sqrt{x}$. Эта функция является возрастающей[1]. На рисунке 2.3 изображён график убывающей функции $y = -x$.

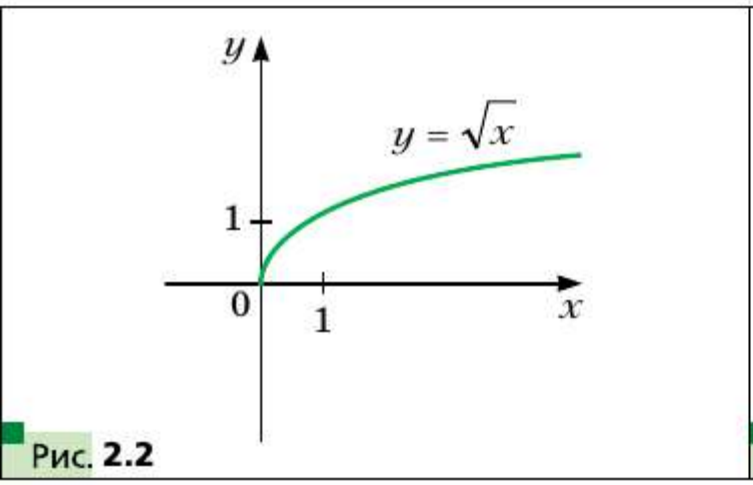


Рис. **2.2**

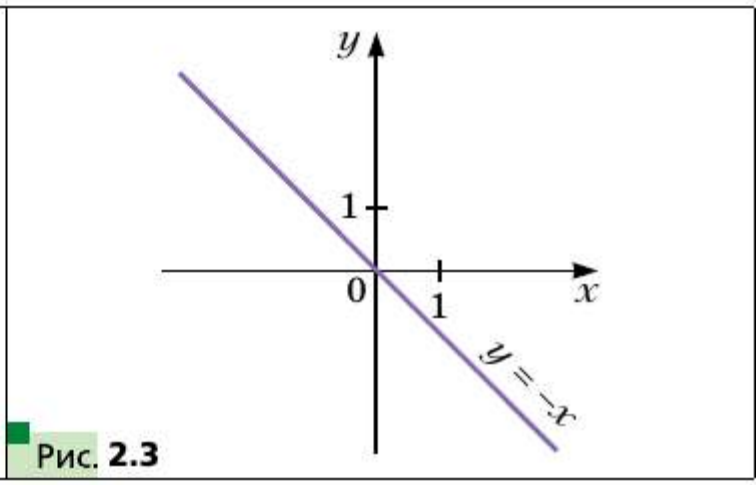


Рис. **2.3**

Пример 1. Докажите, что функция $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(-\infty; 0]$, причём $x_1 < x_2$. Докажем, что $x_1^n > x_2^n$. Тем самым покажем, что на промежутке $(-\infty; 0]$ большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Имеем: $x_1 < x_2$, $-x_1 > -x_2$. Обе части последнего неравенства являются неотрицательными числами. Тогда по свойству числовых неравенств можно записать, что $(-x_1)^n > (-x_2)^n$. Так как n чётное, то $x_1^n > x_2^n$. ■

Если функция является возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, то этот промежуток называют **промежутком возрастания (убывания)** функции.

Так, в примере 1 доказано, что промежуток $(-\infty; 0]$ является промежутком убывания функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число. Аналогично можно доказать, что промежуток $[0; +\infty)$ является промежутком возрастания этой функции.

Замечание. В задачах на поиск промежутков возрастания и убывания функции указывают те промежутки, которые не являются собственными подмножествами никаких других промежутков возрастания и убывания, аналогично тому, как это делают при поиске промежутков знакопостоянства.

---

[1] Этот факт следует из свойств арифметического квадратного корня, рассмотренных в 8 классе.

Существуют функции, определённые на $\boldsymbol{R}$, не являющиеся возрастающими (убывающими) ни на одном промежутке области определения. Например, такой функцией является константа, т. е. функция $y = c$, где c — некоторое число. Ещё одним примером такой функции может служить функция Дирихле.

Пример 2. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(0; +\infty)$, причём $x_1 < x_2$. Тогда по свойству числовых неравенств $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Следовательно, данная функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$.

Аналогично доказывают, что функция f убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. ■

Мы показали, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Объединение этих промежутков равно $D(f)$. Однако нельзя утверждать, что данная функция убывает на всей области определения, т. е. является убывающей. Действительно, если, например, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то из неравенства $x_1 < x_2$ не следует, что $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

Пример 3. Докажите, что линейная функция $f(x) = kx + b$ является возрастающей при $k > 0$ и убывающей при $k < 0$.

Решение. Имеем: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причём $x_1 < x_2$.

Запишем: $f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$. Так как $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Если $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, при $k > 0$ данная функция является возрастающей.

Если $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, при $k < 0$ данная функция является убывающей. ■

Теорема 2.1

Если функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей) на множестве $M \subset D(f)$, то функция $y = -f(x)$ является убывающей (возрастающей) на множестве M.

Доказательство

Пусть, например, функция $y = f(x)$ является возрастающей на множестве M. Тогда для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M

и таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Отсюда $-f(x_1) > -f(x_2)$. Следовательно, функция $y = -f(x)$ является убывающей на множестве M.

Аналогично рассматривается случай, когда функция $y = f(x)$ является убывающей на множестве M. ■

Используя определения возрастающей и убывающей на множестве M функций, а также свойства числовых неравенств, докажите теоремы 2.2–2.4 самостоятельно.

Теорема 2.2

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются возрастающими (убывающими) на множестве $M \subset D(f) \cap D(g)$, то функция $y = f(x) + g(x)$ является возрастающей (убывающей) на множестве M.

Например, функция $y = -2x + 3$ является убывающей, функция $y = x^4$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. Тогда функция $y = -2x + 3 + x^4$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Теорема 2.3

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются возрастающими (убывающими) на множестве $M \subset D(f) \cap D(g)$ и для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то функция $y = f(x)\,g(x)$ является возрастающей (убывающей) на множестве M.

Например, функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей, функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. На этом промежутке рассматриваемые функции принимают неотрицательные значения. Тогда функция $y = x^2\sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Теорема 2.4

Если функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей) на множестве M и на этом множестве функция f принимает значения одинакового знака, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является убывающей (возрастающей) на множестве M.

Например, функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей. Промежуток $(0; +\infty)$ является промежутком знакопостоянства этой функции. Тогда функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является убывающей.

Теорема 2.5

Если функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей), то уравнение $f(x) = a$, где a — некоторое число, имеет не более одного корня.

Доказательство

Пусть числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $f(x) = a$, причём $x_1 \neq x_2$. Поскольку функция f является возрастающей (убывающей), то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Имеем: $f(x_1) = a$, $f(x_2) = a$. Отсюда $f(x_1) = f(x_2)$. Получили противоречие. Следовательно, уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня. ■

Следствие

Если одна из функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$ является возрастающей на множестве $M = D(f) \cap D(g)$, а другая — убывающей на множестве M, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Доказательство

Пусть функция $y = f(x)$ является возрастающей, а функция $y = g(x)$ — убывающей на множестве M. Тогда по теореме 2.1 функция $y = -g(x)$ является возрастающей на множестве M. По теореме 2.2 функция $y = f(x) - g(x)$ является возрастающей на множестве M. Тогда по теореме 2.5 уравнение $f(x) - g(x) = 0$ имеет не более одного корня.

Случай, когда функция $y = f(x)$ является убывающей, а функция $y = g(x)$ — возрастающей на множестве M, рассматривается аналогично. ■

Пример 4. Решите уравнение $x^5 + \sqrt{2x-1} = 2$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = x^5$ и $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Они являются возрастающими (докажите это самостоятельно). Следовательно, по теореме 2.2 функция $y = f(x) + g(x)$ является возрастающей. Тогда теорема 2.5 позволяет утверждать, что данное уравнение имеет не более одного корня.

Нетрудно заметить, что $x = 1$ является корнем данного уравнения. С учётом вышесказанного этот корень является единственным.

Ответ: 1. ■

Теорема 2.6

Если функция f является возрастающей, то уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$.

Доказательство

Пусть x_0 — корень уравнения $f(x) = x$, т. е. $f(x_0) = x_0$. Тогда $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, т. е. x_0 — корень уравнения $f(f(x)) = x$.

Пусть x_1 — корень уравнения $f(f(x)) = x$, т. е. $f(f(x_1)) = x_1$. Докажем, что $f(x_1) = x_1$. Предположим, что это не так. Тогда $f(x_1) > x_1$ или $f(x_1) < x_1$.

Рассмотрим случай, когда $f(x_1) > x_1$ (случай, когда $f(x_1) < x_1$, рассматривается аналогично). Так как f — возрастающая функция, то $f(f(x_1)) > f(x_1)$. Но $f(f(x_1)) = x_1$. Отсюда $f(x_1) < x_1$. Получили противоречие.

Следовательно, $f(x_1) = x_1$, т. е. x_1 — корень уравнения $f(x) = x$. ■

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{2 + \sqrt{2 + x}} = x$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{2 + x}$. Данное уравнение можно представить в виде $f(f(x)) = x$, где $f(x) = \sqrt{2 + x}$.

Так как функция f — возрастающая (докажите это самостоятельно), то это уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$, т. е. уравнению $\sqrt{2 + x} = x$.

Возведём обе части этого уравнения в квадрат и перейдём к уравнению-следствию:

$$2 + x = x^2.$$

Отсюда $x = 2$ или $x = -1$.

Проверкой устанавливаем, что корнем исходного уравнения является только $x = 2$.

Ответ: 2. ■

Определение

Число $f(x_0)$ называют наибольшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Обозначают: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Определение

Число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Обозначают: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ и $M = [0; 4]$ имеем: $\min\limits_{[0; 4]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0; 4]} f(x) = f(4) = 2$ (рис. 2.4).

Для $f(x) = |x|$ и $M = [-1; 2]$ имеем: $\min\limits_{[-1; 2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 2$ (рис. 2.5).

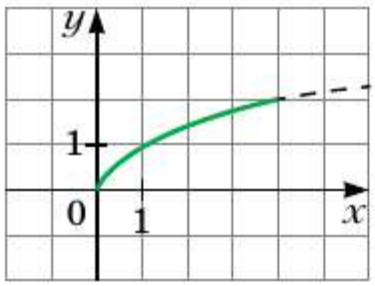


Рис. 2.4

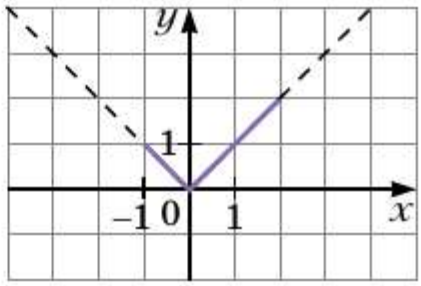


Рис. 2.5

Если c — некоторое число и $f(x) = c$ для любого $x \in M \subset \boldsymbol{R}$, то это число является и наибольшим, и наименьшим значением функции f на множестве M.

Не любая функция на данном множестве $M \subset D(f)$ имеет наименьшее или наибольшее значение. Так, для функций $f(x) = x^2$ и $f(x) = \{x\}$ получаем, что $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = 0$, а наибольшего значения на множестве $\boldsymbol{R}$ эти функции не имеют. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множестве $M = (0; +\infty)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Часто при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции удобно пользоваться такими очевидными свойствами:

- *если функция f возрастает на промежутке* $[a; b]$, *то* $\min\limits_{[a; b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a; b]} f(x) = f(b)$ (рис. 2.6);
- *если функция f убывает на промежутке* $[a; b]$, *то* $\min\limits_{[a; b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a; b]} f(x) = f(a)$ (рис. 2.7).

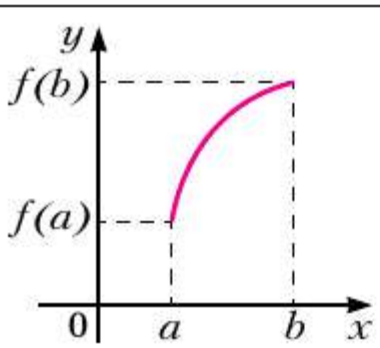


Рис. 2.6

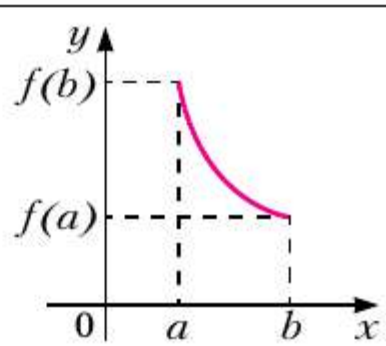


Рис. 2.7

Пример 6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x + 2$ на промежутке $[-2; 1]$.

Решение. Функции $y = x^3$ и $y = 3x + 2$ являются возрастающими (докажите это самостоятельно). По теореме 2.2 возрастающей является и данная функция f. Следовательно, $\min\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = -12$, $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(1) = 6$. ■

Пример 7. Докажите, что при всех $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$ выполняется неравенство:

$$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) \leqslant 1.$$

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства:

$$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) - 1 = x(1 - y - z) - yz + y + z - 1.$$

Докажем, что эта разность принимает только неположительные значения.

Считая y и z параметрами, рассмотрим функцию $f(x) = (1 - y - z)x - yz + y + z - 1$. Функция f, $D(f) = \boldsymbol{R}$, — линейная, и её графиком является прямая. Тогда графиком функции f, $D(f) = [0; 1]$, является отрезок, абсциссы концов которого равны 0 и 1. Эта функция является или возрастающей, или убывающей, или постоянной. Во всех трёх случаях наибольшее значение функция f, $D(f) = [0; 1]$, принимает на одном из концов промежутка $[0; 1]$.

Имеем:

$f(0) = -yz + y + z - 1 = -(y - 1)(z - 1) \leqslant 0$,

$f(1) = 1 - y - z - yz + y + z - 1 = -yz \leqslant 0$.

Следовательно, $f(0) \leqslant 0$, $f(1) \leqslant 0$. Поэтому $\max\limits_{[0;\,1]} f(x) \leqslant 0$. Это означает, что для любого $x \in [0; 1]$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant 0$. Следовательно, выражение $x(1 - y - z) - yz + y + z - 1$ принимает только неположительные значения. ■

Пусть для любого $x \in D(f) \cap D(g)$ выполняются неравенства $f(x) \leqslant A$ и $g(x) \geqslant A$, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Это очевидное соображение является ключом к решению целого ряда уравнений.

Пример 8. Решите уравнение $|x + 1| + |x - 1| = \sqrt{4 - x^2}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ и $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Поскольку $4 - x^2 \leqslant 4$, то $\sqrt{4 - x^2} \leqslant 2$. Тогда для любого $x \in D(g)$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant 2$.

Рассмотрим на координатной прямой точки A (x), B (-1) и C (1) (рис. 2.8). Тогда значение выражения $|x + 1| + |x - 1|$ равно сумме $AB + AC$. Поскольку $BC = 2$, то при любом положении точки A на координатной прямой выполняется неравенство $AB + AC \geqslant 2$, т. е. $|x + 1| + |x - 1| \geqslant 2$. Тогда для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 2$.

Получаем, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} |x+1| + |x-1| = 2, \\ \sqrt{4 - x^2} = 2. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственный корень $x = 0$, который также является корнем первого уравнения системы.

Ответ: 0. ■

1. Что называют нулём функции?

2. Что называют промежутками знакопостоянства функции?

3. Какую функцию называют возрастающей (убывающей) на множестве M?

4. Какую функцию называют возрастающей (убывающей)?

5. Функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей). Сколько корней может иметь уравнение $f(x) = a$, где a — некоторое число?

6. Какое число называют наибольшим (наименьшим) значением функции на множестве M?

Упражнения

2.1. На рисунке 2.9 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве $\boldsymbol{R}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) нули функции;

2) промежутки знакопостоянства функции;

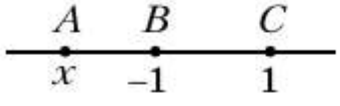


Рис. 2.8

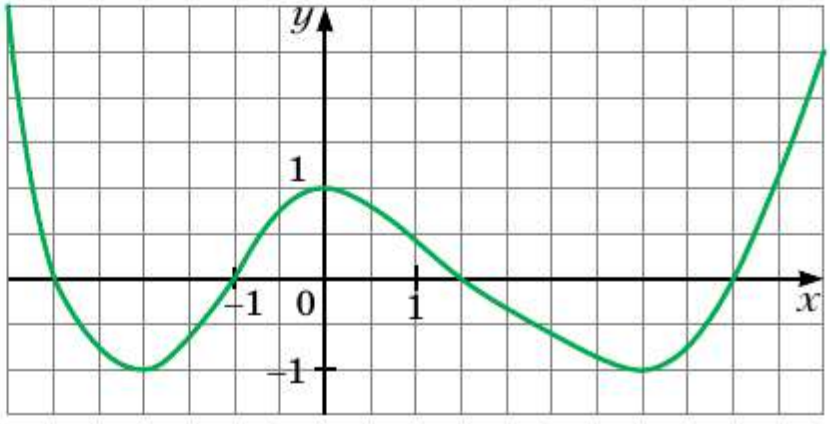


Рис. 2.9

3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
4) значение: $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x)$, $\max\limits_{\boldsymbol{R}} f(x)$, $\min\limits_{[-2;\,1]} f(x)$, $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x)$, $\max\limits_{(-2;\,0)} f(x)$, $\min\limits_{(-2;\,0)} f(x)$.

2.2. На рисунке 2.10 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве $\boldsymbol{R}$. Пользуясь графиком, найдите:
1) нули функции;
2) промежутки знакопостоянства функции;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
4) значение: $\max\limits_{[0;\,2]} f(x)$, $\min\limits_{[0;\,2]} f(x)$, $\max\limits_{\boldsymbol{R}} f(x)$, $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x)$, $\max\limits_{[-1;\,0)} f(x)$, $\min\limits_{[-1;\,0)} f(x)$.

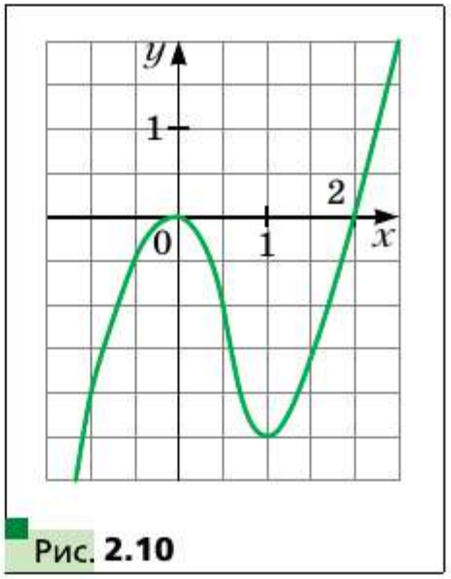


Рис. **2.10**

2.3. При каком наибольшем целом значении параметра n функция $y = (8 - 3n)x - 7$ является возрастающей?

2.4. При каких значениях параметра m функция $y = mx - m - 3 + 2x$ является убывающей?

2.5. Найдите промежутки возрастания функции $y = \{x\}$.

2.6. Найдите нули функции:
1) $y = x^2 + 1$;
2) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;
3) $y = x\sqrt{x-1}$;
4) $y = |x| - x$;
5) $y = \{x\}$;
6) $y = \mathfrak{D}(x)$.

2.7. Найдите нули функции:
1) $y = -5$;
2) $y = |x| + x$;
3) $y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x-2}}$;
4) $y = [x]$;
5) $y = x\,\mathfrak{D}(x)$;
6) $y = \operatorname{sgn}(2x - 1)$.

2.8. Найдите промежутки знакопостоянства функции:
1) $y = x^2 - 2x + 1$;
2) $y = \dfrac{9}{3 - x}$;
3) $y = \sqrt{x-1}$;
4) $y = |x + 1|$;
5) $y = \sqrt{x(x-1)^2}$;
6) $y = \{x\}$.

2.9. Найдите промежутки знакопостоянства функции:
1) $y = x^2 + 4x + 4$;
2) $y = \sqrt{x} + 2$;
3) $y = |x| - 1$;
4) $y = |x^2 - 4|$;
5) $y = \sqrt{(x-1)(x-3)^2}$;
6) $y = [x]$.

2.10. Докажите, что функция является возрастающей:
1) $y = \sqrt{x-1}$;
2) $y = \sqrt{2x+1}$.

2.11. Докажите, что функция является возрастающей:
1) $y = \sqrt{x-3} + 2$;
2) $y = \sqrt{3x-1} - 1$.

2.12. Функция $y = f(x)$ является убывающей. Возрастающей или убывающей является функция (ответ обоснуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = f(x) + 5$?

2.13. Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$. Возрастающей или убывающей на множестве $\boldsymbol{R}$ является функция (ответ обоснуйте):

1) $y = -3f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = f(x + 5)$?

2.14. Докажите, что функция $y = x^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$, n — нечётное, является возрастающей.

2.15. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2 + 1$.

2.16. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^2 - 4$.

2.17. Докажите, что функция:

1) $y = \dfrac{6}{3 - x}$ возрастает на промежутке $(3; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4x + 3$ убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

2.18. Докажите, что функция:

1) $y = \dfrac{7}{x + 5}$ убывает на промежутке $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$.

2.19. Докажите, что функция $y = \dfrac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ при $k > 0$ и возрастает на каждом из этих промежутков при $k < 0$.

2.20. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

2.21. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = \dfrac{1}{-x^2 - 4}$.

2.22. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = |x - a|$.

2.23. Докажите, что функция является возрастающей:

1) $y = x^5 + x$; 3) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x}$; 5) $y = x\sqrt{-x}$;

2) $y = x^4 + \sqrt{x}$; 4) $y = x\sqrt{x}$; 6) $y = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2$.

2.24. Докажите, что функция является убывающей:

1) $y = -x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $y = -x\sqrt{-x}$;

2) $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{-x}$; 4) $y = -x\sqrt{x}$.

2.25. Функция $y = f(x)$ является возрастающей. Верно ли утверждение, что возрастающей является функция: 1) $y = (f(x))^2$; 2) $y = (f(x))^3$?

2.26. Найдите $\max\limits_{M} f(x)$ и $\min\limits_{M} f(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $M = \boldsymbol{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $M = D(f)$.

2.27. Найдите $\max\limits_{M} f(x)$ и $\min\limits_{M} f(x)$, если:

1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = \boldsymbol{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $M = D(f)$.

◆ ◆ ◆

2.28. Найдите:

1) $\min\limits_{\boldsymbol{R}} (|x-1| + |x-3|)$; 2) $\max\limits_{\boldsymbol{R}} (|x+2| - |x|)$; 3) $\max\limits_{\boldsymbol{R}} \dfrac{1}{x^2+1}$.

2.29. Функции f и g определены на множестве $\boldsymbol{R}$. Возрастающей или убывающей является функция $y = f(g(x))$, если:

1) f и g — возрастающие функции;

2) f и g — убывающие функции?

2.30. Функции f и g определены на множестве $\boldsymbol{R}$. Возрастающей или убывающей является функция $y = f(g(x))$, если:

1) f — возрастающая, g — убывающая;

2) f — убывающая, g — возрастающая?

2.31. При каких значениях параметра a функция $y = x|x - a|$ является возрастающей?

2.32. При каких значениях параметра a функция $y = (x-1)(x-a)^2$ является возрастающей?

2.33. При каких значениях параметра a функция $y = |x - a|$ возрастает на промежутке $[2; +\infty)$?

2.34. При каких значениях параметра a функция $y = |x + a|$ убывает на промежутке $(-\infty; -1]$?

2.35. Решите уравнение:

1) $x^5 + x^3 + x = -3$;

2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x+13} = 9$;

3) $x^3 + 2x\sqrt{x-1} = 12$.

2.36. Решите уравнение:

1) $2x^7 + x^5 + x = 4$;

2) $2\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{2x+7} = 13$;

3) $4x^3 + 3x\sqrt{4x-1} = 2$.

2.37. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 23 - 2x$; 2) $x^3 + \sqrt{x} = \dfrac{2}{x}$.

2.38. Решите уравнение:

1) $x^2 + \sqrt{x} = \dfrac{12}{x} + 15$; 2) $\dfrac{17}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

2.39. Решите уравнение $|x+1| - |x| = \sqrt{x^4+1}$.

2.40. Решите уравнение $|x-1| + |x+2| = \sqrt{9-x^2}$.

2.41. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^7 - y = y^7 - x, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$

2.42. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x}, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

2.43. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{x+y} + (x+y)^4 = 3, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

2.44. Докажите, что при всех $x \in [1; 2]$, $y \in [1; 2]$ выполняется неравенство $3(x + y) \geqslant 2xy + 4$.

2.45. Докажите, что при всех $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $c \in [0; 1]$ выполняется неравенство $abc + 2 \geqslant a + b + c$.

2.46. Решите уравнение $\sqrt{6 + \sqrt{6 + x}} = x$.

2.47. Решите уравнение $(x^3 + 1)^3 = 8(2x - 1)$.

2.48. Функция f такова, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Может ли функция f быть возрастающей или убывающей?

Упражнения для повторения

2.49. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{y - 2} = 0$.

2.50. Постройте график функции $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$.

§ 3 Чётные и нечётные функции

Определение

Функцию f называют чётной, если для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Определение

Функцию f называют нечётной, если для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $f(x) = x^2$ — чётная, а функция $g(x) = x^3$ — нечётная. Действительно, $D(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняются равенства $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ и $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Выполнение равенств $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$ означает, что множество $D(f)$ обладает таким свойством: если $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Такую область определения называют **симметричной относительно начала координат**.

Из приведённых определений следует, что *если область определения функции не является симметричной относительно начала координат, то эта функция не может быть чётной (нечётной).*

Например, область определения функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ несимметрична относительно начала координат. Поэтому эта функция не является ни чётной, ни нечётной.

У функции $f(x) = x^3 + x^2$, $D(f) = \boldsymbol{R}$, область определения симметрична относительно начала координат. Однако она не является ни чётной, ни нечётной. Действительно,

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$; $-f(x) = -x^3 - x^2$. Получаем, что ни одно из равенств $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ не выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Пример 1. Исследуйте на чётность функцию $f(x) = \dfrac{|x-2|}{1+x} + \dfrac{|x+2|}{1-x}$.

Решение. $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq -1 \text{ и } x \neq 1\}$. Следовательно, область определения функции f симметрична относительно начала координат.

Для любого $x \in D(f)$ имеем:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Следовательно, функция f чётная. ■

Пример 2. Исследуйте на чётность функцию $f(n) = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$, $D(f) = \boldsymbol{Z}$.

Решение. Множество $\boldsymbol{Z}$ является симметричным относительно начала координат.

Для любого $n \in \boldsymbol{Z}$ имеем:

$$f(-n) = \frac{2^{-n} - 1}{2^{-n} + 1} = \frac{\dfrac{1}{2^n} - 1}{\dfrac{1}{2^n} + 1} = \frac{\dfrac{1-2^n}{2^n}}{\dfrac{1+2^n}{2^n}} = -\frac{2^n - 1}{2^n + 1} = -f(n).$$

Следовательно, функция f нечётная. ■

Теорема 3.1

Если точка $M\,(a;\ b)$ принадлежит графику чётной функции f, то точка $M_1\,(-a;\ b)$ также принадлежит её графику[1].

Доказательство

Если точка $M\,(a;\ b)$ принадлежит графику функции f, то $f(a) = b$. Так как функция f чётная, то $f(-a) = f(a) = b$. Это означает, что точка $M_1\,(-a;\ b)$ также принадлежит графику функции f (рис. 3.1). ■

Теорема 3.2

Если точка $M\,(a;\ b)$ принадлежит графику нечётной функции f, то точка $M_1\,(-a;\ -b)$ также принадлежит её графику[2] (рис. 3.2).

Докажите эту теорему самостоятельно.

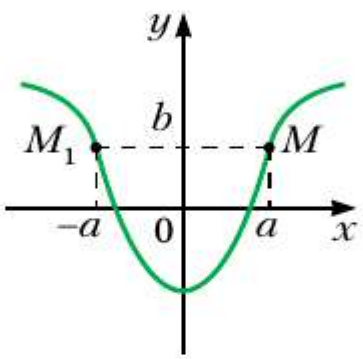


Рис. **3.1**

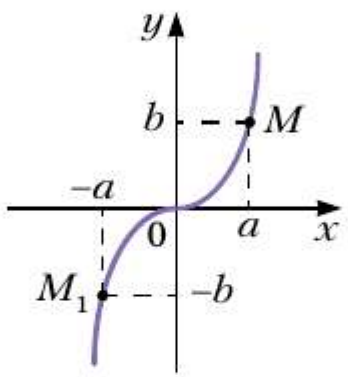


Рис. **3.2**

Теорема 3.3

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ чётные (нечётные) и $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функция $y = f(x) \pm g(x)$ является чётной (нечётной).

Теорема 3.4

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ чётные (нечётные) и $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функция $y = f(x)\,g(x)$ является чётной. Если одна из функций f или g чётная, а другая — нечётная, то функция $y = f(x)\,g(x)$ является нечётной.

---

[1] О таком графике говорят, что ось ординат является его осью симметрии, или график симметричен относительно оси ординат. С фигурами, имеющими ось симметрии, вы познакомились в курсе математики 6 класса. Более подробно об этих фигурах вы узнаете в курсе геометрии 9 класса.

[2] О таком графике говорят, что начало координат является его центром симметрии, или график симметричен относительно начала координат.

Используя определения чётной и нечётной функций, докажите теоремы 3.3 и 3.4 самостоятельно.

Очевидно, что функция $y = 0$, у которой $D(y) = \boldsymbol{R}$, одновременно является и чётной, и нечётной функцией. Покажем, что других функций с областью определения $\boldsymbol{R}$, являющихся одновременно и чётными, и нечётными, не существует.

Пусть функция f, определённая на множестве $\boldsymbol{R}$, является и чётной, и нечётной. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняются равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$. Отсюда $f(x) = -f(x)$, т. е. $2f(x) = 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, функция f такова, что $f(x) = 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Теорема 3.5

Каждую функцию f, область определения которой симметрична относительно начала координат, можно единственным способом представить в виде суммы чётной и нечётной функций.

Доказательство

Рассмотрим функции $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ и $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. Легко установить (убедитесь в этом самостоятельно), что функция g чётная, а функция h нечётная. Заметим, что $f(x) = g(x) + h(x)$. Итак, мы представили функцию f в виде суммы чётной и нечётной функций.

Докажем, что такое представление единственное. Пусть это не так, т. е. найдутся чётные функции g_1 и g_2 и нечётные функции h_1 и h_2 такие, что для любого $x \in D(f)$ выполняются равенства:

$$f(x) = g_1(x) + h_1(x),$$
$$f(x) = g_2(x) + h_2(x).$$

Отсюда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство

$$g_1(x) - g_2(x) = h_2(x) - h_1(x).$$

Пусть $\varphi(x) = g_1(x) - g_2(x)$. В силу теоремы 3.3 функция φ чётная.

В то же время функция $\varphi(x) = h_2(x) - h_1(x)$, а следовательно, в силу теоремы 3.3 функция φ нечётная. Отсюда следует, что для любого $x \in D(f)$ функция φ — константа, равная нулю. Следовательно, для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $g_1(x) = g_2(x)$ и $h_2(x) = h_1(x)$. ■

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение $2ax^4 + |x| + x^2 = a^2 - 1$ имеет единственный корень?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 2ax^4 + |x| + x^2 - a^2 + 1$. Она является чётной. Поэтому если уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x_0, то оно также имеет корень $-x_0$. Для того чтобы уравнение имело единственный

корень, должно выполняться равенство $x_0 = -x_0$, т. е. $x_0 = 0$. Тогда необходимо, чтобы $x = 0$ было корнем данного уравнения.

Подставим $x = 0$ в исходное уравнение. Получим: $a^2 - 1 = 0$. Отсюда $a = 1$ или $a = -1$.

При этих значениях параметра a число 0 является корнем исходного уравнения. Однако это не означает, что уравнение не имеет других корней, отличных от нуля. Поэтому следует выяснить, сколько корней имеет исходное уравнение при $a = 1$ и $a = -1$.

При $a = 1$ имеем: $2x^4 + |x| + x^2 = 0$. Так как $2x^4 \geqslant 0$, $|x| \geqslant 0$ и $x^2 \geqslant 0$, то это уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

При $a = -1$ имеем: $-2x^4 + |x| + x^2 = 0$. Это уравнение, кроме корня $x = 0$, имеет и другие корни, например $x = 1$. Следовательно, значение $a = -1$ не подходит.

Ответ: $a = 1$. ■

1. Какую функцию называют чётной (нечётной)?
2. Какую область определения функции называют симметричной относительно начала координат?
3. Каким свойством обладает график чётной (нечётной) функции?
4. Как можно представить функцию, область определения которой симметрична относительно начала координат?

Упражнения

3.1. Функция f чётная. Может ли выполняться равенство:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

3.2. Функция f чётная. Обязательно ли выполняется равенство $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

3.3. Функция f нечётная. Может ли выполняться равенство:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

3.4. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = 171$;
2) $f(x) = x^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и n — чётное;
3) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;
5) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;
6) $g(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - x + 1} + \dfrac{3x - 2}{x^2 + x + 1}$.

3.5. Исследуйте на чётность функцию:

1) $g(x) = x^n$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и n — нечётное;

2) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;

4) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}$;

5) $f(x) = \dfrac{|5x-2| + |5x+2|}{x^2-1}$;

6) $f(x) = (x+2)|x-4| - (x-2)|x+4|$.

3.6. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = \dfrac{x-1}{x-1}$;

2) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;

3) $y = \sqrt{x^2-1}$;

4) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;

5) $y = \mathfrak{D}(x)$;

6) $y = x\mathfrak{D}(x)$.

3.7. Чётные функции f и g таковы, что функция $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ определена. Исследуйте на чётность функцию h.

3.8. Нечётные функции f и g таковы, что функция $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ определена. Исследуйте на чётность функцию h.

3.9. Одна из функций f или g чётная, другая — нечётная. Известно, что функция $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ определена. Исследуйте на чётность функцию h.

3.10. Функции f и g таковы, что функция $y = f(g(x))$ определена. Исследуйте её на чётность, если:

1) f и g — чётные функции;

2) f и g — нечётные функции;

3) f — чётная функция, а g — нечётная;

4) f — нечётная функция, а g — чётная.

3.11. Нечётная функция f такова, что $0 \in D(f)$. Найдите $f(0)$.

3.12. Нечётная функция f имеет 4 нуля. Докажите, что $0 \notin D(f)$.

3.13. Нечётная функция f имеет 7 нулей. Найдите $f(0)$.

3.14. Чётная функция f имеет 7 нулей. Найдите $f(0)$.

3.15. Исследуйте на чётность функцию $f(n) = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$, $D(f) = \boldsymbol{Z}$.

3.16. Исследуйте на чётность функцию $f(n) = \left(\sqrt{2}+1\right)^n - \left(\sqrt{2}-1\right)^n$, $D(f) = \boldsymbol{Z}$.

3.17. Чётная функция f, определённая на $\boldsymbol{R}$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Определите, возрастающей или убывающей является функция f на промежутке $(-\infty; 0]$.

3.18. Нечётная функция f, определённая на $\boldsymbol{R}$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Определите, возрастающей или убывающей является функция f на промежутке $(-\infty; 0]$.

3.19. Функция f чётная и $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$. Найдите $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$.

3.20. Функция f нечётная и $\min\limits_{[2;\,5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;\,5]} f(x) = 3$. Найдите $\min\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$.

◆ ◆ ◆

3.21. Чётная функция f определена на промежутке $[-5; 5]$ и на концах этого промежутка достигает наибольшего и наименьшего значений. Найдите $f(-0{,}2) - f(1)$.

3.22. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = (x - 1)^4 + a(x + 1)^4$ является: 1) чётной; 2) нечётной.

3.23. При каких значениях параметра a уравнение $ax^6 + 1 = a^2\sqrt{1 - |x|}$ имеет единственный корень?

3.24. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{20})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{20})$ получили многочлен. Докажите, что этот многочлен не содержит одночленов нечётной степени.

Упражнения для повторения

3.25. Упростите выражение $\sqrt{a - 2 + 2\sqrt{a - 3}}$.

3.26. Решите уравнение $(x - 1)(x - 7)(x - 4)(x + 2) = 40$.

§ 4 Построение графиков функций $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$

В курсе алгебры 8 класса вы ознакомились с функцией $y = x^2$ и узнали, что её графиком является фигура, которую называют параболой (рис. 4.1).

Покажем, как можно, используя график функции $y = x^2$, построить график функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

Построим, например, график функции $y = 2x^2$.

Сопоставим значения функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$ при одних и тех же значениях аргумента.

Каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0; 2y_0)$ графика функции $y = 2x^2$. А каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = 2x^2$ является соответствующей единственной точке $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ графика функции $y = x^2$. Таким образом, между множествами точек графиков функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$ установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому все точки графика функции $y = 2x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на 2 (рис. 4.2).

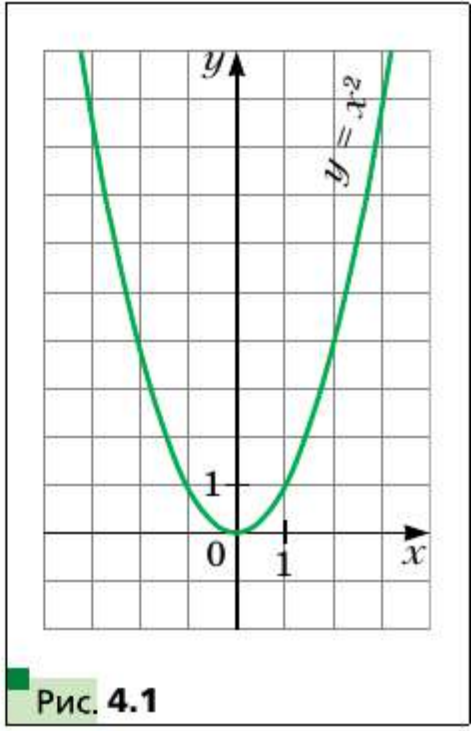


Рис. 4.1

Используя график функции $y = x^2$, построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

Все точки графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на $\frac{1}{2}$ (рис. 4.3).

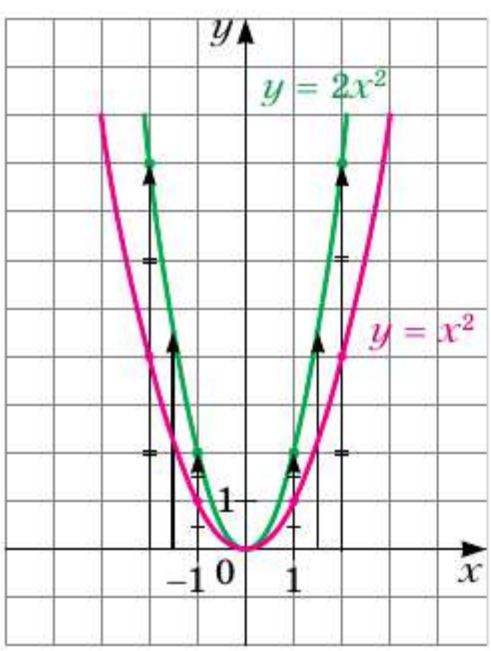


Рис. 4.2

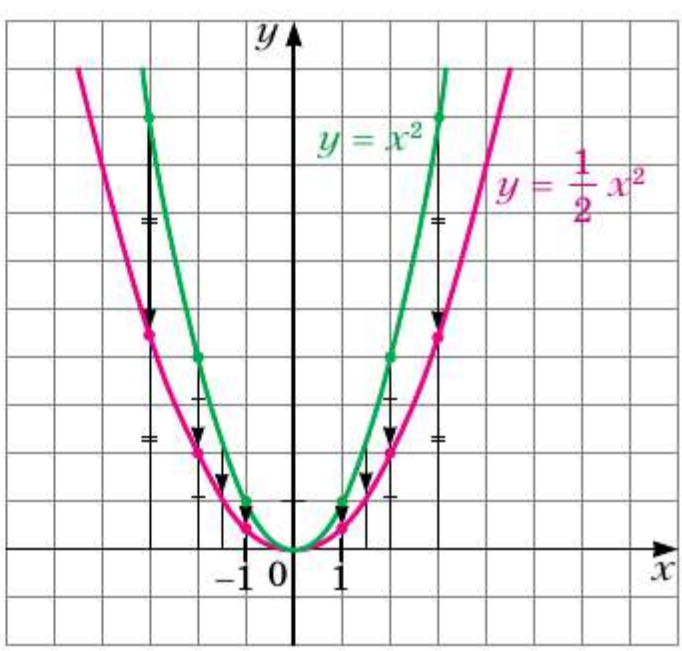


Рис. 4.3

Рассмотренные примеры подсказывают, как, используя график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = kf(x)$, где $k > 0$.

График функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k.

На рисунках 4.4, 4.5 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

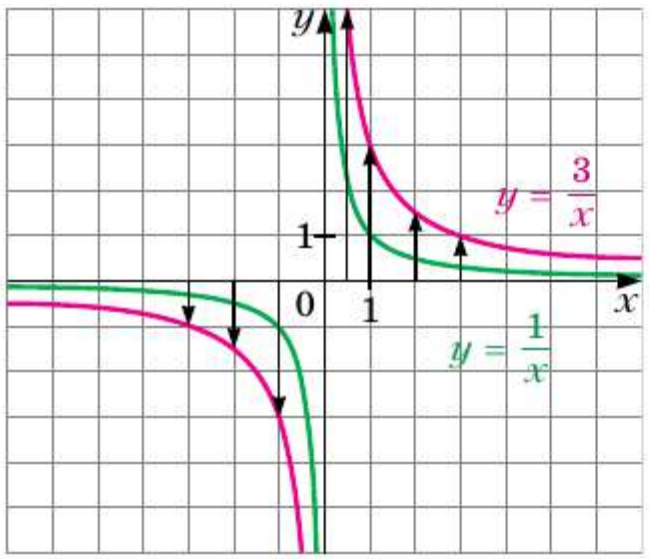


Рис. 4.4

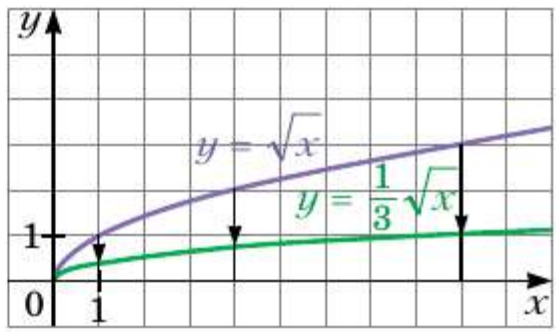


Рис. 4.5

Говорят, что график функции $y = kf(x)$ получен в результате **растяжения** графика функции $y = f(x)$ **в k раз от оси абсцисс**, если $k > 1$, или в результате **сжатия** графика функции $y = f(x)$ **в $\frac{1}{k}$ раз к оси абсцисс**, если $0 < k < 1$.

Так, график функции $y = \frac{3}{x}$ получен в результате растяжения графика функции $y = \frac{1}{x}$ в 3 раза от оси абсцисс, а график функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ — в результате сжатия графика функции $y = \sqrt{x}$ в 3 раза к оси абсцисс.

Рассмотрим функции $y = x^2$ и $y = -x^2$. Каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0; -y_0)$ графика функции $y = -x^2$. А каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = -x^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1; -y_1)$ графика функции $y = x^2$. Таким образом, между множествами точек графиков функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому

все точки графика функции $y = -x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на -1 (рис. 4.6). Также говорят, что график функции $y = -x^2$ получен в результате **преобразования симметрии относительно оси абсцисс** графика функции $y = x^2$.

Теперь понятно, что правило построения графика функции $y = kf(x)$, где $k < 0$, такое же, как и для случая, когда $k > 0$.

Рисунок 4.7 иллюстрирует, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ построить графики функций $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ и $y = -2\sqrt{x}$.

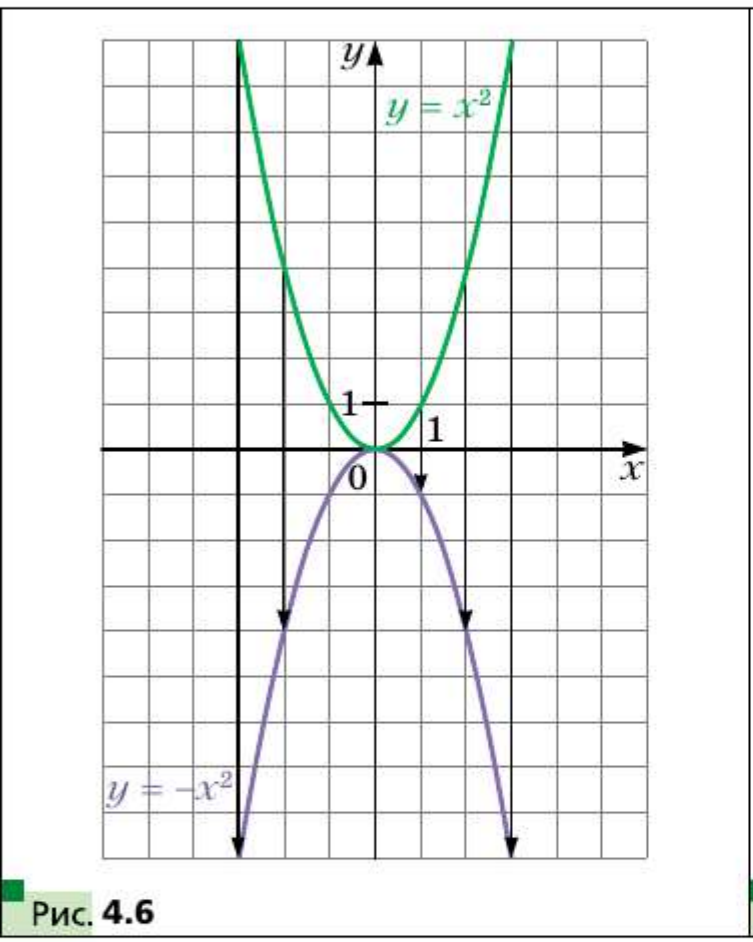


Рис. **4.6**

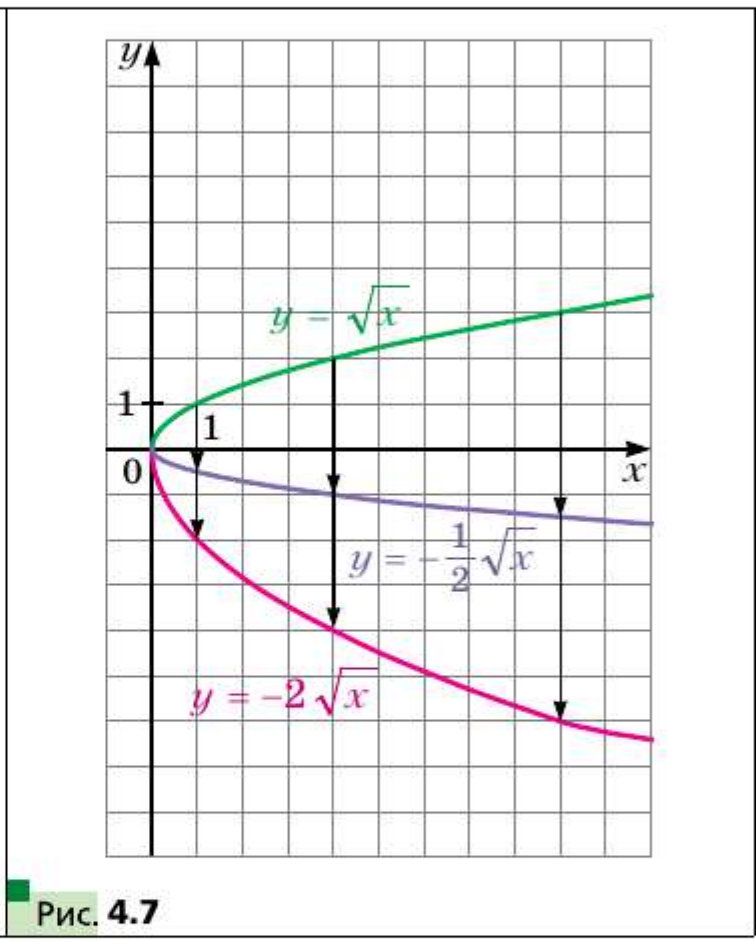


Рис. **4.7**

Заметим, что при $k \neq 0$ нули функций $y = f(x)$ и $y = kf(x)$ совпадают. Следовательно, графики этих функций пересекают ось абсцисс в одних и тех же точках.

На форзаце учебника показаны графики функций $y = ax^2$ при некоторых значениях параметра a. Каждый из этих графиков, как и график функции $y = x^2$, называют **параболой**. Точка (0; 0) является **вершиной** каждой из этих парабол.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Часто вместо высказывания «дана функция $y = ax^2$» используют высказывание «дана парабола $y = ax^2$».

Покажем, как можно построить график функции $y = f(kx)$, если известен график функции $y = f(x)$.

Рассмотрим случай, когда $k > 0$. Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ принадлежит графику функции $y = f(kx)$. Действительно, при $x = \frac{x_0}{k}$ имеем: $f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0$.

Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ соответствует единственная точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графика функции $y = f(kx)$. Аналогично можно показать, что каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = f(kx)$ является соответствующей единственной точке $(kx_1; y_1)$ графика функции $y = f(x)$. Таким образом, между множествами точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(kx)$ установлено взаимно однозначное соответствие.

График функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же ординатой и абсциссой, разделённой на k.

На рисунке 4.8 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{2x}$ и $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

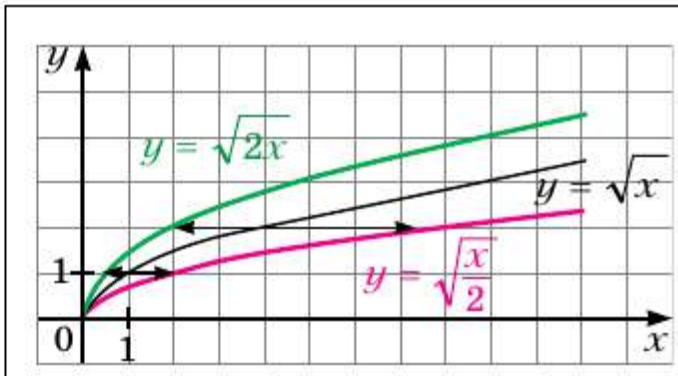


Рис. 4.8

Говорят, что график функции $y = f(kx)$ получен в результате **сжатия** графика функции $y = f(x)$ **в k раз к оси ординат**, если $k > 1$, или в результате **растяжения** графика функции $y = f(x)$ **в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат**, если $0 < k < 1$.

Так, график функции $y = \sqrt{2x}$ получен в результате сжатия графика функции $y = \sqrt{x}$ в 2 раза к оси ординат, а график функции $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ — в результате растяжения графика функции $y = \sqrt{x}$ в 2 раза от оси ординат.

Покажем, как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$.

Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$. Действительно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$. Аналогично можно показать, что каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = f(-x)$ является соответствующей единственной точке $(-x_1; y_1)$ графика функции $y = f(x)$. Таким образом, между множествами точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ установлено взаимно однозначное соответствие. Тогда все точки графика функции $y = f(-x)$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же ординатой и противоположной абсциссой.

Говорят, что график функции $y = f(-x)$ получен в результате **преобразования симметрии относительно оси ординат** графика функции $y = f(x)$.

На рисунке 4.9 показано, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ построить график функции $y = \sqrt{-x}$.

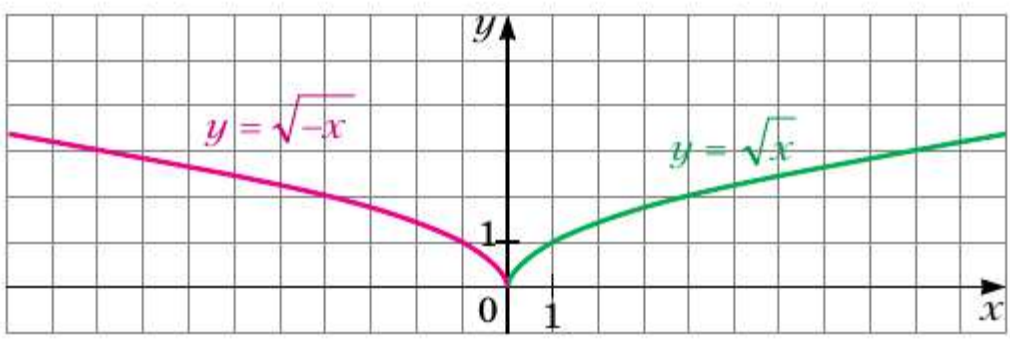


Рис. **4.9**

Теперь становится понятным, что правило построения графика функции $y = f(kx)$, где $k < 0$, аналогично случаю, когда $k > 0$.

Например, на рисунке 4.10 показано, как можно с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ построить графики функций $y = \sqrt{-3x}$ и $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

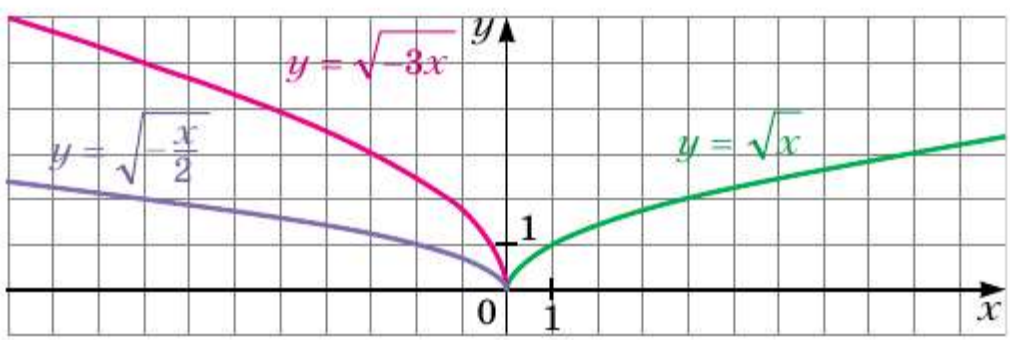


Рис. **4.10**

1. Как можно получить график функции $y = kf(x)$, где $k \neq 0$, используя график функции $y = f(x)$?
2. Какая фигура является графиком функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$?
3. Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2$?
4. Как направлены ветви параболы $y = ax^2$ при $a > 0$? При $a < 0$?
5. Какова область определения функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$?
6. Какова область значений функции $y = ax^2$ при $a > 0$? При $a < 0$?
7. Укажите нули функции $y = ax^2$.
8. Укажите промежутки знакопостоянства функции $y = ax^2$ при $a > 0$; при $a < 0$.
9. На каком промежутке возрастает и на каком промежутке убывает функция $y = ax^2$ при $a > 0$? При $a < 0$?
10. Как можно получить график функции $y = f(kx)$, где $k \neq 0$, используя график функции $y = f(x)$?

Упражнения

4.1. На рисунке 4.11 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

4.2. На рисунке 4.12 изображён график функции $y = g(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3} g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2} g(x)$.

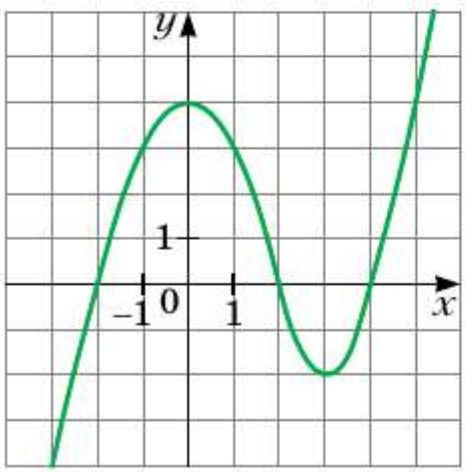


Рис. 4.11

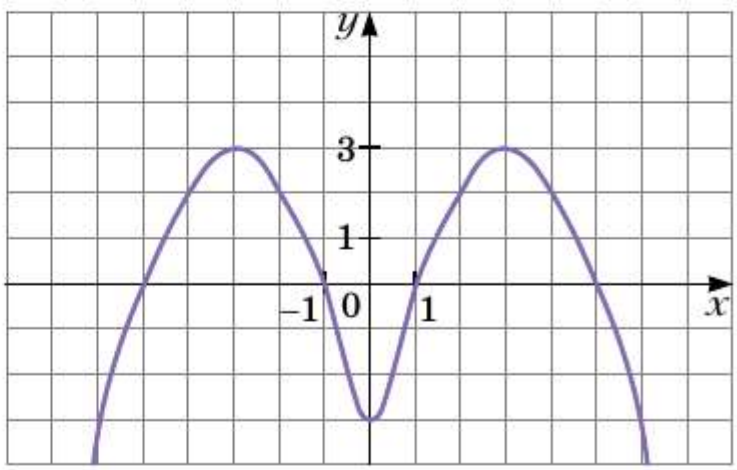
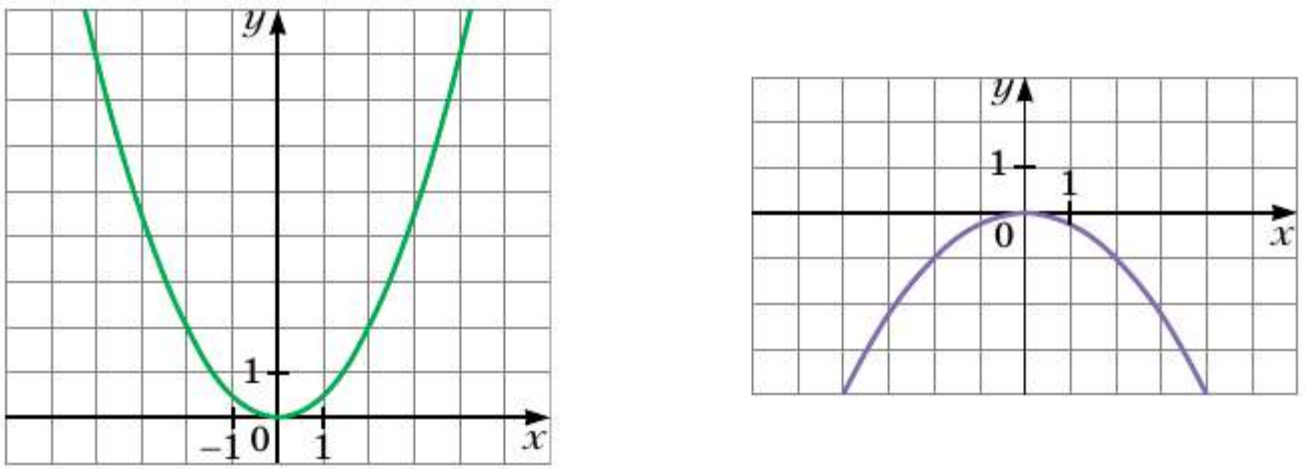


Рис. 4.12

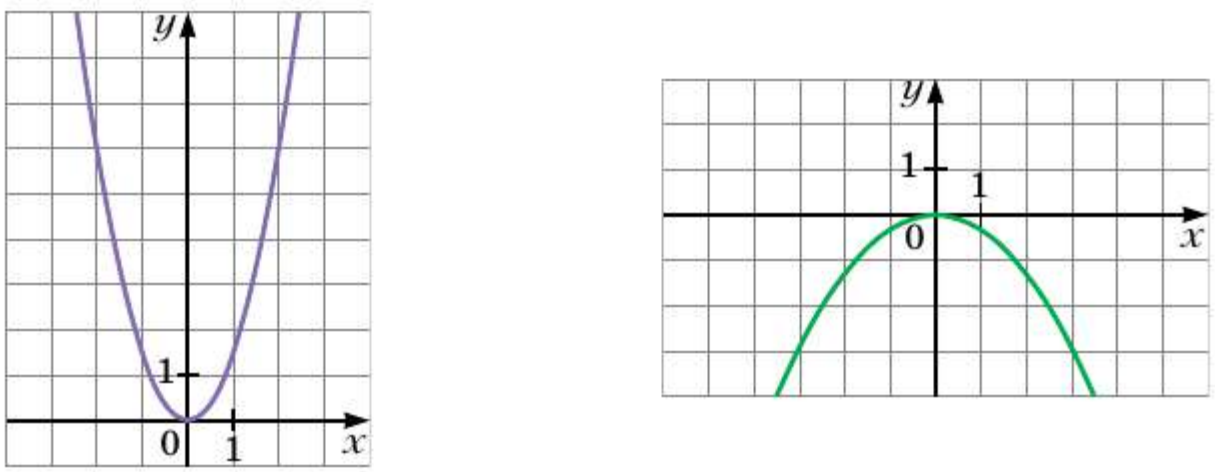
4.3. На рисунке 4.13 изображён график функции $y = ax^2$. Найдите значение a.



а б

Рис. **4.13**

4.4. На рисунке 4.14 изображён график функции $y = ax^2$. Найдите значение a.



а б

Рис. **4.14**

4.5. На рисунке 4.15 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(-x)$; 2) $y = f(2x)$; 3) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

4.6. На рисунке 4.16 изображён график функции $y = g(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(-x)$; 2) $y = g\left(\frac{3}{2}x\right)$; 3) $y = g(-3x)$.

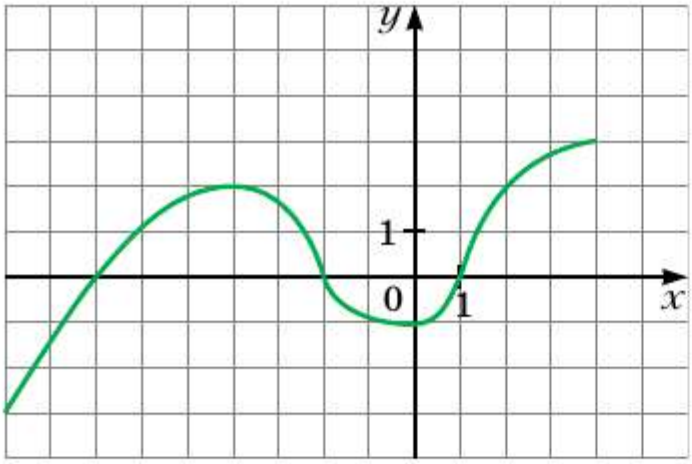


Рис. **4.15**

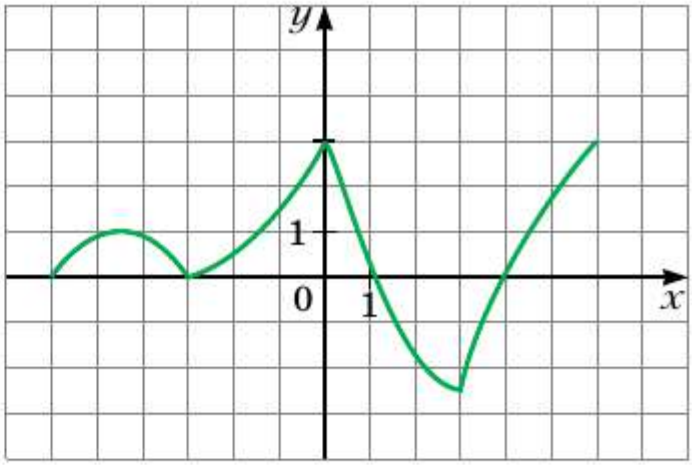


Рис. **4.16**

4.7. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте графики функций $y = 4\sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-\frac{x}{3}}$.

4.8. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, постройте графики функций $y = -\sqrt{x}$ и $y = \sqrt{3x}$.

4.9. Используя график функции $y = |x|$, постройте графики функций $y = \frac{1}{2}|x|$ и $y = -2|x|$.

4.10. Докажите, что функция $y = ax^2$ при $a > 0$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

4.11. Докажите, что функция $y = ax^2$ при $a < 0$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

4.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -2x^2$ на множестве M, если:

1) $M = [-3; -2]$; 3) $M = (-3; 1]$;
2) $M = [-2; 1]$; 4) $M = [1; 3)$.

4.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на множестве M, если:

1) $M = [2; 4]$; 3) $M = [-2; 4)$;
2) $M = [-2; 4]$; 4) $M = (-4; -2)$.

4.14. Постройте график функции:

1) $y = 2[x]$; 2) $y = -\frac{1}{2}\{x\}$; 3) $y = 3\operatorname{sgn} x$.

4.15. Постройте график функции:

1) $y = -\frac{1}{2}[x]$; 2) $y = 2\{x\}$; 3) $y = -2\operatorname{sgn} x$.

4.16. Постройте график функции:

1) $y = [2x]$; 2) $y = \left\{-\frac{x}{2}\right\}$.

4.17. Постройте график функции:

1) $y = \left[-\frac{x}{2}\right]$; 2) $y = \{2x\}$.

Упражнения для повторения

4.18. Решите уравнение $|3x - 2| = |2x - 3|$.

4.19. Постройте график уравнения $\frac{y + x^2}{y + x} = 0$.

4.20. Упростите выражение $\sqrt{6 - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}$.

4.21. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ равно 2?

§ 5 Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$

Покажем, как, используя график функции $y = x^2$, построить график функции $y = x^2 + 2$.

Сопоставим значения этих функций при одних и тех же значениях аргумента.

Каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0; y_0 + 2)$ графика функции $y = x^2 + 2$. А каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = x^2 + 2$ является соответствующей единственной точке $(x_1; y_1 - 2)$ графика функции $y = x^2$. Таким образом, между множествами точек графиков функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$ установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому все точки графика функции $y = x^2 + 2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, увеличенной на 2 (рис. 5.1).

Говорят, что график функции $y = x^2 + 2$ получен в результате **параллельного переноса**[1] графика функции $y = x^2$ вдоль оси ординат на 2 единицы вверх.

Аналогично график функции $y = x^2 - 4$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ на 4 единицы вниз (рис. 5.2).

[1] На уроках геометрии вы более подробно ознакомитесь с параллельным переносом.

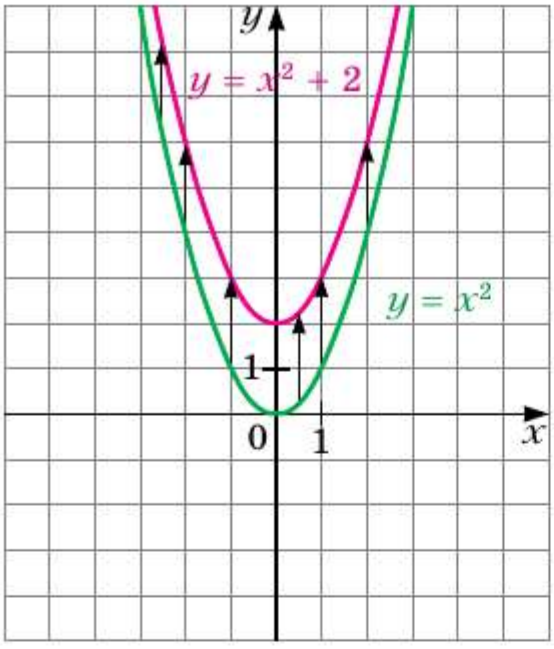


Рис. **5.1**

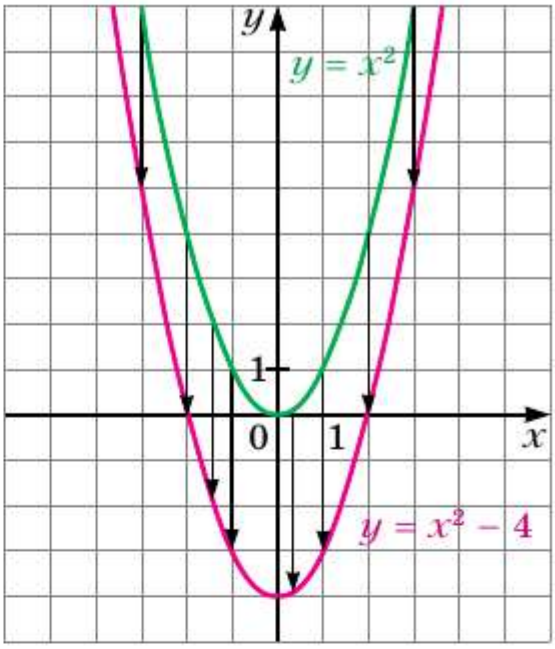


Рис. **5.2**

Рассмотренные примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x) + b$.

График функции $y = f(x) + b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на b единиц вверх, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$.

На рисунках 5.3, 5.4 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x} + 3$ и $y = \frac{1}{x} - 1$.

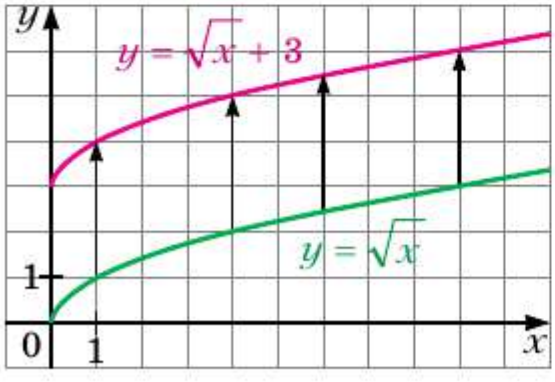


Рис. **5.3**

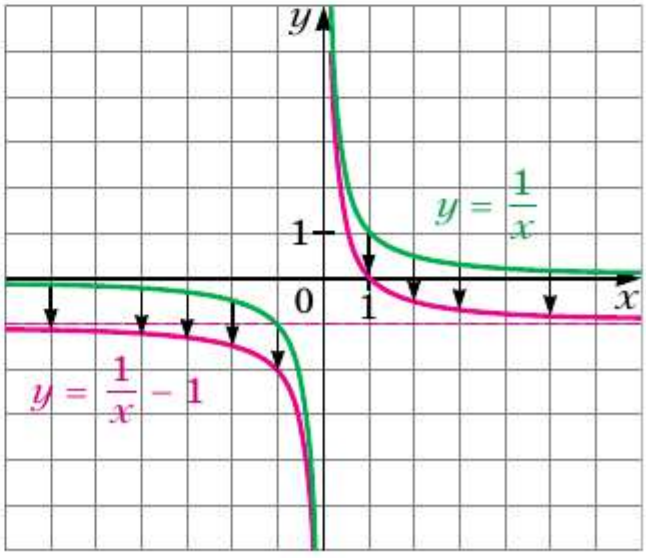


Рис. **5.4**

В результате параллельного переноса графика функции получаем фигуру, равную этому графику. Например, каждый из графиков функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 4$ равен параболе $y = x^2$, поэтому графиками функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 4$ тоже являются параболы.

Покажем, как можно с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x + 2)^2$.

Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, т. е. ${x_0}^2 = y_0$. Докажем, что точка $(x_0 - 2; y_0)$ принадлежит графику функции $y = (x + 2)^2$. Найдём значение этой функции в точке с абсциссой $x_0 - 2$. Имеем: $((x_0 - 2) + 2)^2 = {x_0}^2 = y_0$. Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0 - 2; y_0)$ графика функции $y = (x + 2)^2$. Аналогично можно показать, что каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = (x + 2)^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1 + 2; y_1)$ графика функции $y = x^2$. Таким образом, между множествами точек графиков функций $y = x^2$ и $y = (x + 2)^2$ установлено взаимно однозначное соответствие.

Поэтому все точки графика функции $y = (x + 2)^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же ординатой и абсциссой, уменьшенной на 2 (рис. 5.5).

Говорят, что график функции $y = (x + 2)^2$ получен в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на две единицы влево.

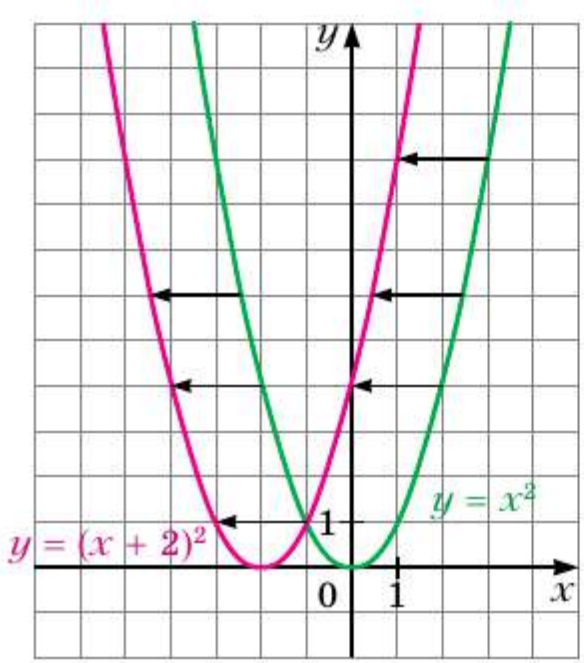


Рис. 5.5

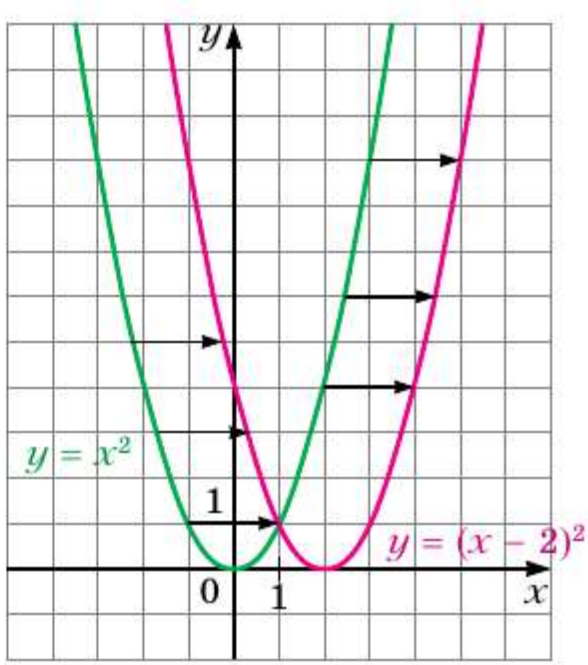


Рис. 5.6

Покажем, как можно с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x - 2)^2$. Легко установить (сделайте это самостоятельно), что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $(x_0 + 2; y_0)$ графика функции $y = (x - 2)^2$ и каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = (x - 2)^2$ является соответствующей единственной точке $(x_1 - 2; y_1)$ графика функции $y = x^2$. Таким образом, между множествами точек графиков функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$ установлено взаимно однозначное соответствие.

Поэтому все точки графика функции $y = (x - 2)^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ точкой с той же ординатой и абсциссой, уменьшенной на 2 (рис. 5.6).

Говорят, что график функции $y = (x - 2)^2$ получен в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо (рис. 5.6).

Эти примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a)$.

График функции $y = f(x + a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

На рисунках 5.7, 5.8 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x + 3}$ и $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

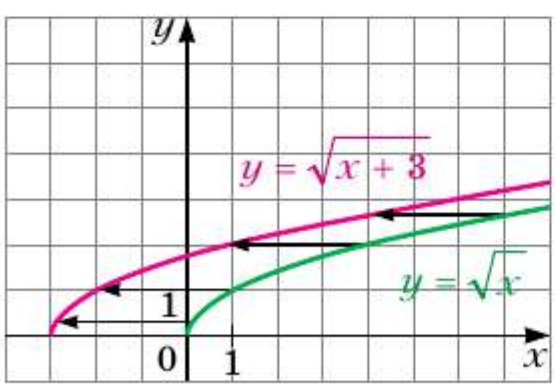


Рис. 5.7

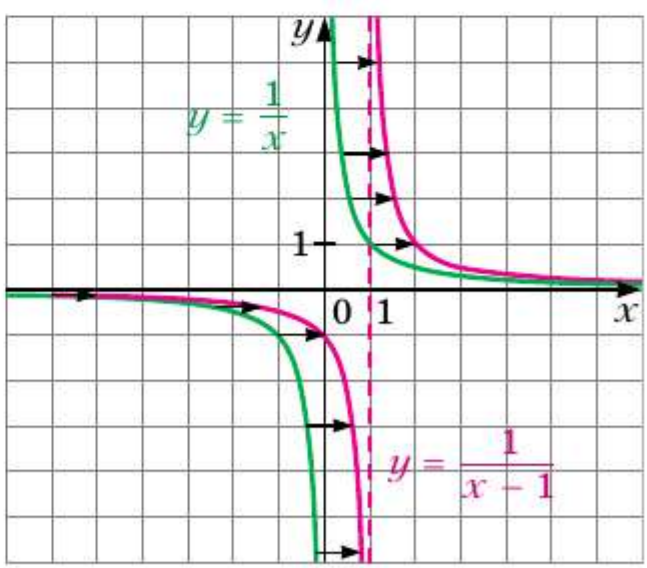


Рис. 5.8

Заметим, что каждый из графиков функций $y = (x + 2)^2$ и $y = (x - 2)^2$ равен параболе $y = x^2$, поэтому графиками функций $y = (x + 2)^2$ и $y = (x - 2)^2$ тоже являются параболы.

Пример 1. Постройте график функции $y = (x - 1)^2 + 3$.

Решение.

1) Построим график функции $y = x^2$.

2) Параллельно перенесём график функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо. Получим график функции $y = (x - 1)^2$ (рис. 5.9).

3) Параллельно перенесём график функции $y = (x - 1)^2$ вдоль оси ординат на 3 единицы вверх. Получим график функции $y = (x - 1)^2 + 3$ (рис. 5.9).

Описанный алгоритм построения представим в виде такой схемы:

$y = x^2$ $\xrightarrow{\text{Вправо на 1 ед.}}$ $y = (x - 1)^2$ $\xrightarrow{\text{Вверх на 3 ед.}}$ $y = (x - 1)^2 + 3$

Пример 2. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$.

Решение.

1) Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 5.10).

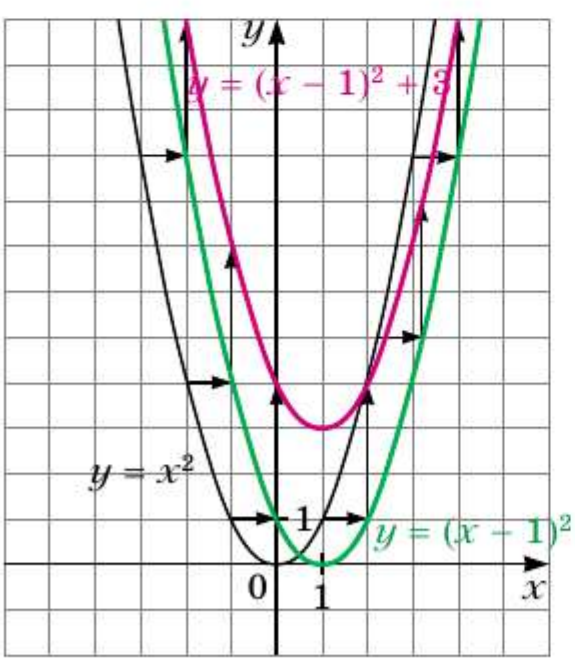


Рис. 5.9

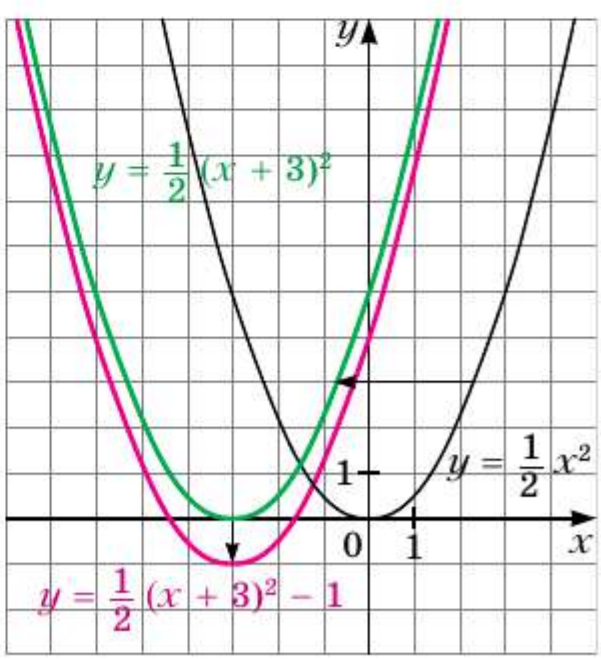


Рис. 5.10

2) Параллельно перенесём график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ вдоль оси абсцисс на 3 единицы влево. Получим график функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ (рис. 5.10).

3) Параллельно перенесём график функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ вдоль оси ординат на 1 единицу вниз. Получим искомый график функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$.

Описанный алгоритм построения представим в виде такой схемы:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{на 3 ед.}]{\text{Влево}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow[\text{на 1 ед.}]{\text{Вниз}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$$

Из описанных преобразований следует, что графиком функции $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$ является парабола с вершиной в точке $(-3; -1)$, равная параболе $y = \frac{1}{2}x^2$.

Этот пример подсказывает, как с помощью графика функции $y = f(x)$ построить график функции $y = kf(x+a) + b$, в частности как с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = k(x+a)^2 + b$.

Теперь можно сделать такой вывод.

Графиком функции $y = k(x+a)^2 + b$, $k \neq 0$, является парабола с вершиной в точке $(-a; b)$, равная параболе $y = kx^2$.

Пример 3. Постройте график функции $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Решение. Имеем: $-2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x+5)^2 + 3$.

Мы представили формулу, задающую данную функцию, в виде $y = kf(x+a) + b$, где $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Схема построения имеет такой вид:

$$y = -2x^2 \xrightarrow[\text{на 5 ед.}]{\text{Влево}} y = -2(x+5)^2 \xrightarrow[\text{на 3 ед.}]{\text{Вверх}} y = -2(x+5)^2 + 3$$

Построенный график является параболой с вершиной в точке (–5; 3), которая равна параболе $y = -2x^2$ (рис. 5.11). ■

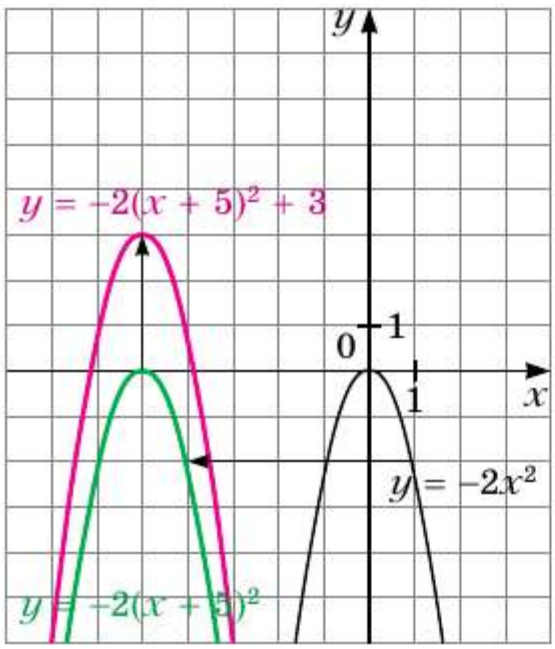


Рис. **5.11**

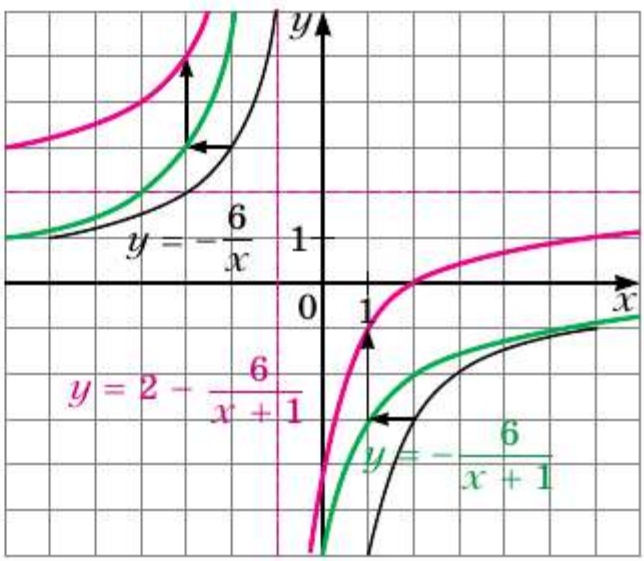


Рис. **5.12**

Пример 4. Постройте график функции $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$.

Решение. Имеем: $\dfrac{2x-4}{x+1} = \dfrac{2x+2-6}{x+1} = \dfrac{2(x+1)-6}{x+1} = 2 - \dfrac{6}{x+1}$. Тогда данную функцию задаёт формула $y = 2 - \dfrac{6}{x+1}$.

Схема построения имеет такой вид (рис. 5.12):

$$y = -\frac{6}{x} \xrightarrow{\text{Влево на 1 ед.}} y = -\frac{6}{x+1} \xrightarrow{\text{Вверх на 2 ед.}} y = 2 - \frac{6}{x+1}$$

■

Из построения следует, что искомый график является гиперболой, равной гиперболе $y = -\dfrac{6}{x}$.

Пример 5. Постройте график функции $y = \sqrt{3x-2}$.

Решение. *Способ 1.* Схема построения имеет такой вид (рис. 5.13):

$y = \sqrt{x}$ —(Вправо на 2 ед.)→ $y = \sqrt{x-2}$ —(Сжатие в 3 раза к оси ординат)→ $y = \sqrt{3x-2}$

Способ 2. Если данную функцию представить в виде $y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$, то построение графика можно провести по такой схеме (рис. 5.14):

$y = \sqrt{x}$ —(Сжатие в 3 раза к оси ординат)→ $y = \sqrt{3x}$ —(Вправо на $\frac{2}{3}$ ед.)→ $y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$

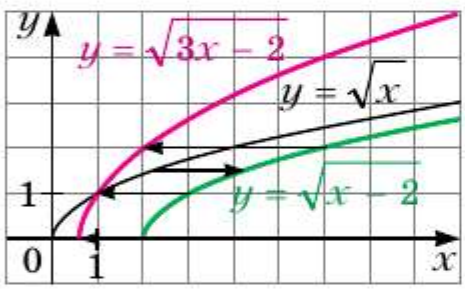


Рис. 5.13

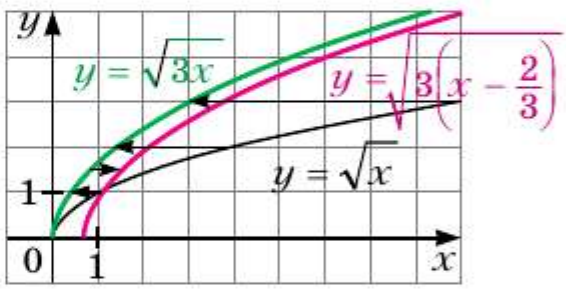


Рис. 5.14

Пример 6. Постройте график функции $y = \sqrt{1-3x}$.

Решение. *Способ 1.* Построение графика можно провести по такой схеме (рис. 5.15):

$y = \sqrt{x}$ —(Влево на 1 ед.)→ $y = \sqrt{x+1}$ —(Симметрия относительно оси ординат)→ $y = \sqrt{-x+1}$ —(Сжатие в 3 раза к оси ординат)→ $y = \sqrt{-3x+1}$

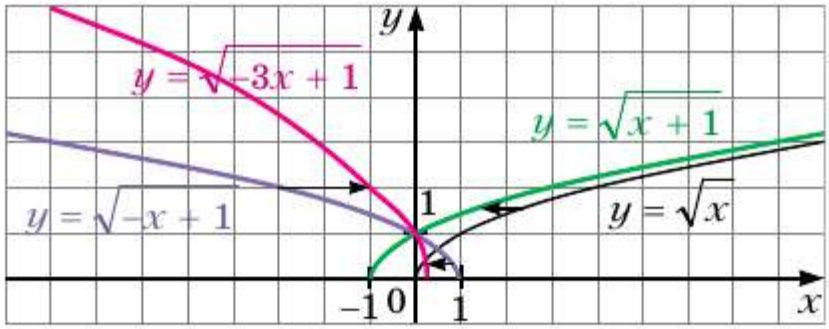


Рис. **5.15**

Способ 2. Построение графика можно провести по такой схеме (рис. 5.16):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{Влево на 1 ед.}} y = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y = \sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{Симметрия относительно оси ординат}} y = \sqrt{-3x+1}$$

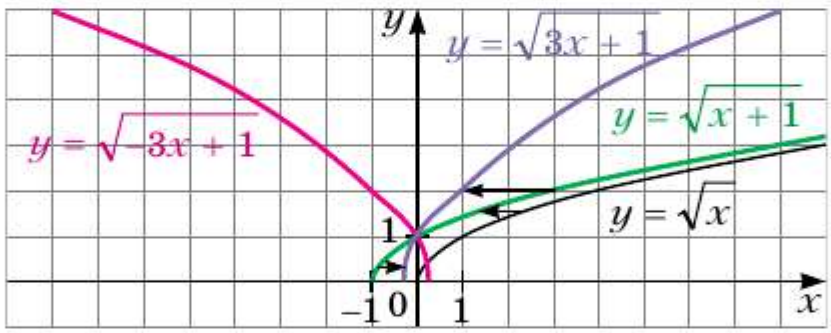


Рис. **5.16**

Способ 3. Построение графика можно провести по такой схеме (рис. 5.17):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{Симметрия относительно оси ординат}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y = \sqrt{-3x} \xrightarrow{\text{Влево на } \frac{1}{3} \text{ ед.}} y = \sqrt{-3\left(x - \frac{1}{3}\right)}$$

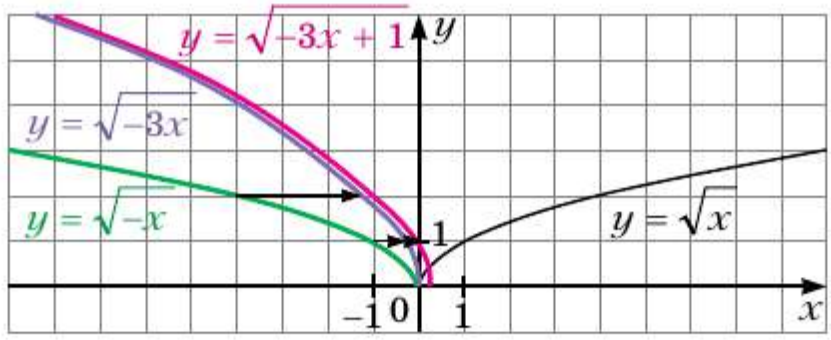


Рис. **5.17**

Пример 7. Определите количество корней уравнения $|x - a| + 2|x + 1| = 3$ в зависимости от значения параметра a.

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$|x - a| = 3 - 2|x + 1|.$$

Рассмотрим функции $f(x) = |x - a|$ и $g(x) = 3 - 2|x + 1|$. Задача сводится к тому, чтобы выяснить, сколько точек пересечения в зависимости от значения параметра a имеют графики функций f и g.

График функции g изображён на рисунке 5.18 красным цветом.

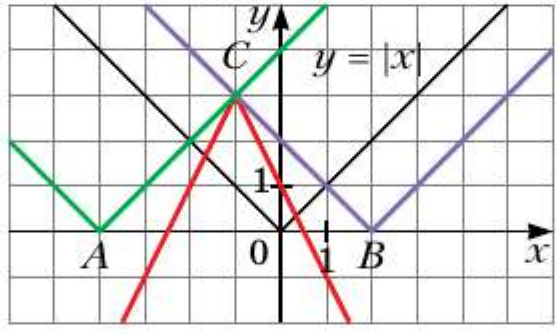


Рис. **5.18**

График функции f — это фигура, которую получают в результате параллельного переноса вдоль оси абсцисс графика функции $y = |x|$ (синим цветом изображён график для отрицательного значения a, зелёным — для положительного, чёрным — для $a = 0$).

Из рисунка 5.18 видно, что если вершина угла, являющегося графиком функции f, расположена на оси абсцисс левее точки A или правее точки B, то графики функций f и g не пересекаются. Если вершина угла совпадает либо с точкой A, либо с точкой B, то графики функций f и g

имеют одну общую точку — точку $C(-1; 3)$. Если вершина угла находится между точками A и B, то графики функций f и g имеют две общие точки.

Координаты точек A и B имеют вид $(a; 0)$.

Значения параметра a, при которых вершина угла, являющегося графиком функции f, совпадает с точкой A или с точкой B, можно найти, подставив в уравнение $y = |x - a|$ координаты точки C. Имеем: $3 = |-1 - a|$. Отсюда $a = -4$ или $a = 2$.

Получаем: $A(-4; 0)$, $B(2; 0)$.

Ответ: Если $a < -4$ или $a > 2$, то корней нет; если $a = -4$ или $a = 2$, то один корень; если $-4 < a < 2$, то 2 корня. ■

1. Как можно получить график функции $y = f(x) + b$, используя график функции $y = f(x)$?

2. Какая фигура является графиком функции $y = x^2 + b$?

3. Каковы координаты вершины параболы $y = x^2 + b$?

4. Как можно получить график функции $y = f(x + a)$, используя график функции $y = f(x)$?

5. Какая фигура является графиком функции $y = (x + a)^2$?

6. Каковы координаты вершины параболы $y = (x + a)^2$?

7. Какая фигура является графиком функции $y = k(x + a)^2 + b$, где $k \neq 0$?

Упражнения

5.1. График какой из данных функций получим, если параллельно перенесём график функции $y = x^2$ на 4 единицы вправо:

1) $y = x^2 + 4$; 3) $y = (x + 4)^2$;
2) $y = x^2 - 4$; 4) $y = (x - 4)^2$?

5.2. График какой из данных функций получим, если параллельно перенесём график функции $y = x^2$ на 5 единиц вверх:

1) $y = x^2 + 5$; 3) $y = (x + 5)^2$;
2) $y = x^2 - 5$; 4) $y = (x - 5)^2$?

5.3. Каковы координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 8$; 3) $y = (x - 4)^2 + 3$;
2) $y = (x + 8)^2$; 4) $y = (x - 4)^2 - 3$?

5.4. Как надо параллельно перенести график функции $y = \frac{5}{x}$, чтобы получить график функции $y = \frac{5}{x - 8}$:

1) на 8 единиц вверх; 3) на 8 единиц вправо;
2) на 8 единиц вниз; 4) на 8 единиц влево?

5.5. Как надо параллельно перенести график функции $y = \sqrt{x}$, чтобы получить график функции $y = \sqrt{x+3}$:

1) на 3 единицы вверх;
2) на 3 единицы вниз;
3) на 3 единицы вправо;
4) на 3 единицы влево?

5.6. Прямые m и n, изображённые на рисунке 5.19, параллельны, причём прямая n является графиком функции $y = f(x)$. Какое из утверждений верно:

1) прямая m является графиком функции $y = f(x) + b$;
2) прямая m является графиком функции $y = f(x - a)$?

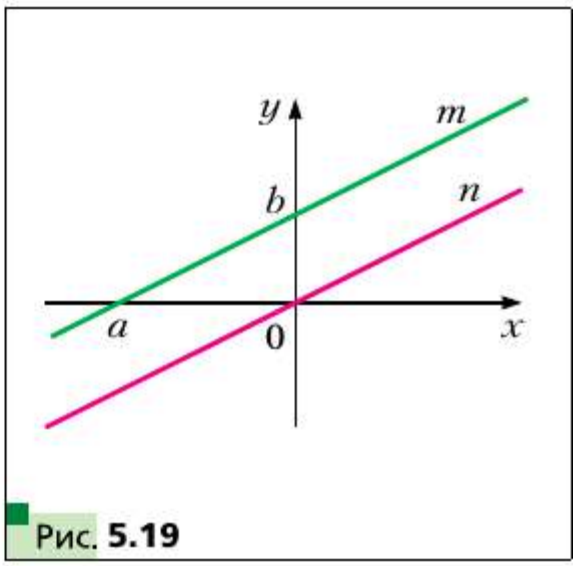


Рис. **5.19**

5.7. Постройте график функции $y = x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

5.8. Постройте график функции $y = -x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -(x - 2)^2$;
3) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
4) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

5.9. Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -\frac{8}{x} + 5$;
2) $y = -\frac{8}{x-2}$;
3) $y = -\frac{8}{x+4} - 2$.

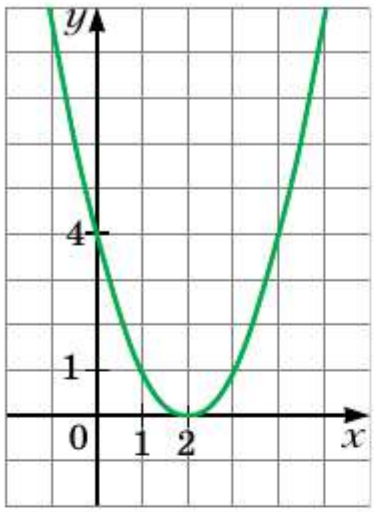
5.10. Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$;
2) $y = \frac{2}{x+1}$;
3) $y = \frac{2}{x-3} + 6$.

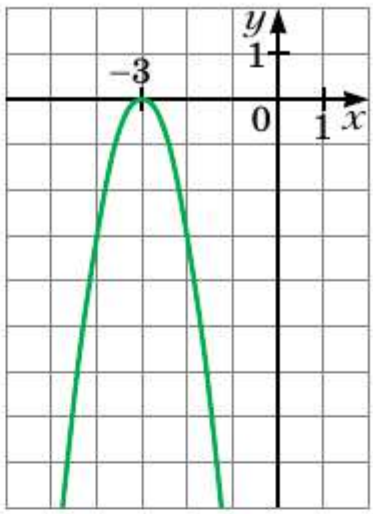
5.11. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x} - 4$;
2) $y = \sqrt{x-4}$;
3) $y = \sqrt{x-1} + 3$.

5.12. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2$ функцию, график которой изображён на рисунке 5.20.



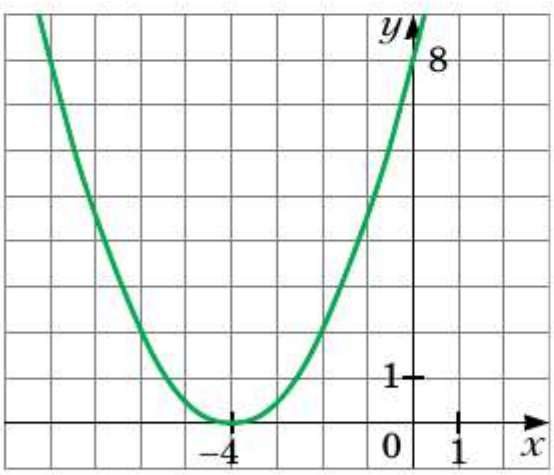
а



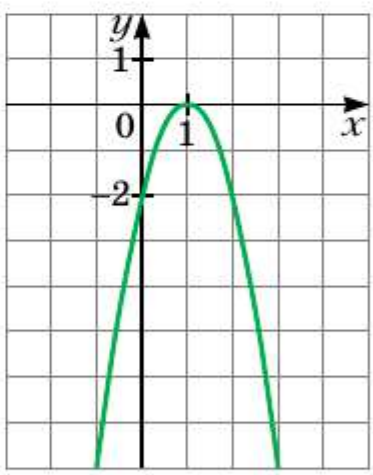
б

Рис. **5.20**

5.13. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2$ функцию, график которой изображён на рисунке 5.21.



а



б

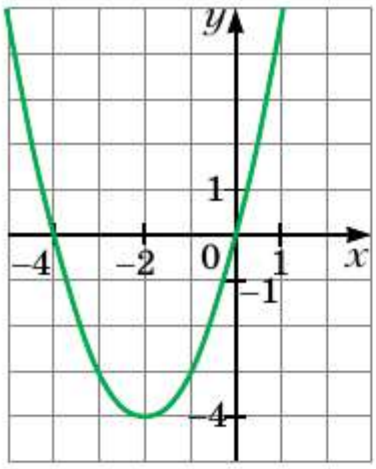
Рис. **5.21**

5.14. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2 + n$ функцию, график которой изображён на рисунке 5.22.

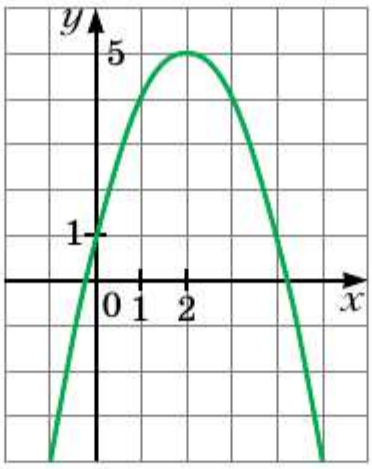
5.15. Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2 + n$ функцию, график которой изображён на рисунке 5.23.

5.16. Решите графически уравнение:

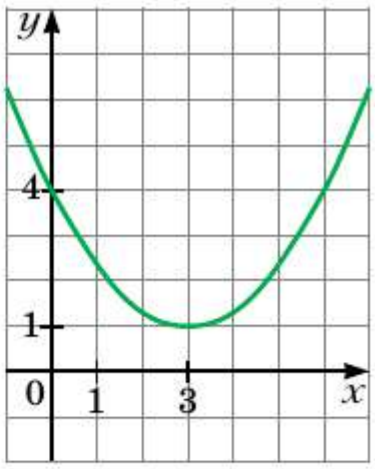
1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$; 2) $2 - x^2 = \sqrt{x}$.



а

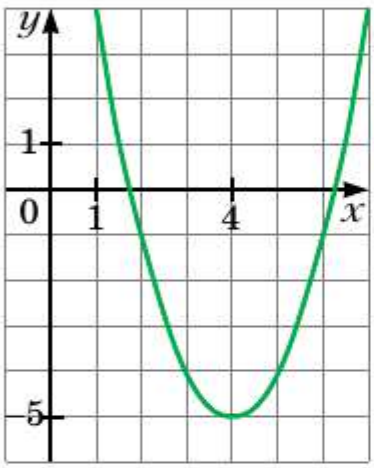


б

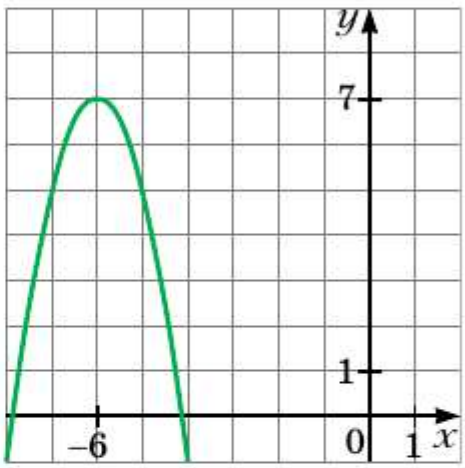


в

Рис. **5.22**



а



б

Рис. **5.23**

5.17. Решите графически уравнение $\frac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.

5.18. Постройте график функции $y = |x|$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = |3 - x| - 2$; 2) $y = \frac{1}{2}|x + 1| - 3$; 3) $y = 1 - 2|x - 1|$.

5.19. Постройте график функции $y = |x|$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = |x - 1| - 3$; 2) $y = 2 - |x + 4|$; 3) $y = 2 - 3|x + 1|$.

5.20. Задайте данную функцию формулой вида $y = a(x - m)^2 + n$ и постройте её график, используя график функции $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

2) $y = -x^2 + 6x - 6$; 4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

5.21. Задайте данную функцию формулой вида $y = a(x - m)^2 + n$ и постройте её график, используя график функции $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

5.22. Задайте данную функцию формулой вида $y = \frac{k}{x+a} + b$ и постройте её график, используя график функции $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{3x+8}{x}$; 2) $y = \frac{-2x}{x-1}$; 3) $y = \frac{x-1}{2x+1}$.

5.23. Задайте данную функцию формулой вида $y = \frac{k}{x+a} + b$ и постройте её график, используя график функции $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{4x+14}{x+1}$; 2) $y = \frac{7-x}{x-2}$; 3) $y = \frac{3x-2}{x+1}$.

5.24. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{4x-1}$; 2) $y = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$; 3) $y = |2x - 1|$.

5.25. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{3x+1}$; 2) $y = \sqrt{-\frac{x}{3} - 1}$; 3) $y = (3x - 1)^2$.

5.26. Определите количество корней уравнения $a - |x| = x^2$ в зависимости от значения параметра a.

5.27. При каких значениях параметра a уравнение $|x| + a = -x^2$ имеет два корня?

5.28. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $\sqrt{x-a} = 1 - x$?

5.29. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $\sqrt{x+a} = 2 - x$?

◆ ◆ ◆

5.30. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = |x - a|$ на отрезке $[1; 3]$.

5.31. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x + a)^2$ на отрезке $[-4; -2]$.

5.32. Определите количество корней уравнения $3|x| = |x - a|$ в зависимости от значения параметра a.

5.33. Определите количество корней уравнения $|x - a| + |x| = 2$ в зависимости от значения параметра a.

5.34. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $x^2 + 1 = |x - a|$?

5.35. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $2 - x^2 = |x + a|$?

Упражнения для повторения

5.36. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{y^2 - y - 2} = 0$.

5.37. Решите уравнение $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2$.

§ 6 Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

Воспользовавшись определением модуля, можно записать:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \geqslant 0, \\ f(-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод, что график функции $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при $x < 0$ — с графиком функции $y = f(-x)$.

Тогда построение графика функции $y = f(|x|)$ можно проводить по следующей схеме.

1) Построить ту часть графика функции $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы;

2) построить ту часть графика функции $y = f(-x)$, все точки которой имеют отрицательные абсциссы.

Объединение этих двух построенных фигур является графиком функции $y = f(|x|)$.

Заметим, что функция $y = f(|x|)$ является чётной. Поэтому ось ординат является осью симметрии её графика. Тогда график функции $y = f(|x|)$ можно получить по следующей схеме.

1) Построить ту часть графика функции $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы;

2) построить фигуру, симметричную полученной относительно оси ординат.

Объединение двух построенных фигур является графиком функции $y = f(|x|)$.

На рисунке 6.1 показано, как с помощью графика функции $y = (x - 2)^2$ построен график функции $y = (|x| - 2)^2$.

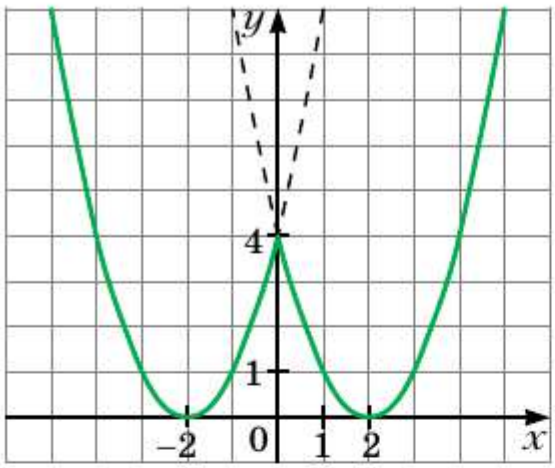


Рис. 6.1

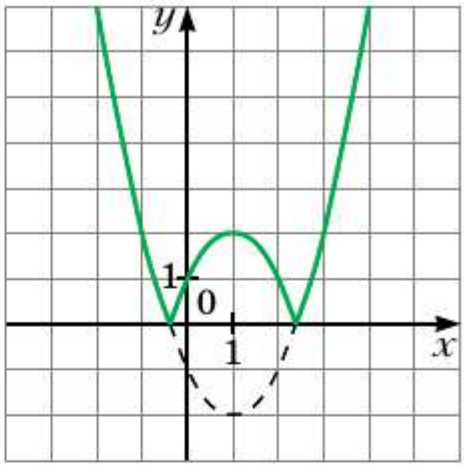


Рис. 6.2

Для функции $y = |f(x)|$ можно записать:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать такой вывод: график функции $y = |f(x)|$ при всех x, для которых $f(x) \geqslant 0$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при всех x, для которых $f(x) < 0$, — с графиком функции $y = -f(x)$.

Тогда построение графика функции $y = |f(x)|$ можно проводить по следующей схеме.

1) Построить ту часть графика функции $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные ординаты;

2) построить ту часть графика функции $y = -f(x)$, все точки которой имеют положительные ординаты.

Объединение двух построенных фигур является графиком функции $y = |f(x)|$.

Поскольку графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс, то искомый график можно получить по следующей схеме.

1) Ту часть графика функции $y = f(x)$, точки которой имеют неотрицательные ординаты, оставить без изменений;

2) построить фигуру, симметричную относительно оси абсцисс той части графика функции $y = f(x)$, точки которой имеют отрицательные ординаты.

Объединение этих двух построенных фигур и составит график функции $y = |f(x)|$.

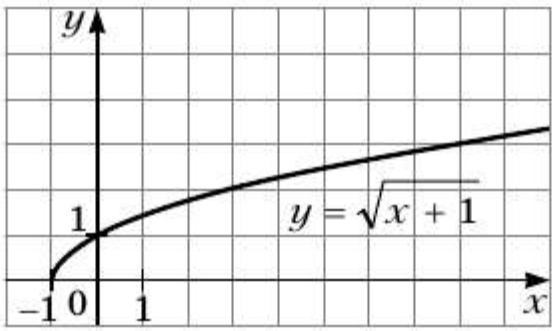
На рисунке 6.2 показано, как с помощью графика функции $y = (x - 1)^2 - 2$ построен график функции $y = |(x - 1)^2 - 2|$.

Пример 1. Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$.

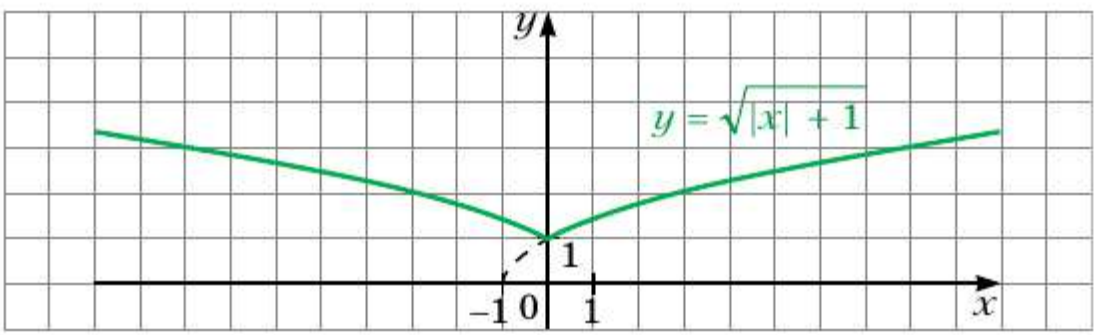
Решение. Построение искомого графика можно представить в виде такой схемы:

$$y = \sqrt{x + 1} \longrightarrow y = \sqrt{|x| + 1} \longrightarrow y = \sqrt{|x| + 1} - 2 \longrightarrow$$

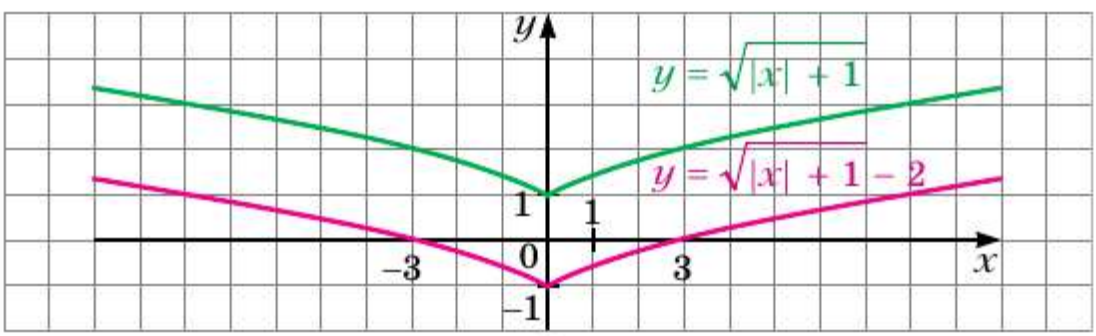
$y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$ (рис. 6.3). ■



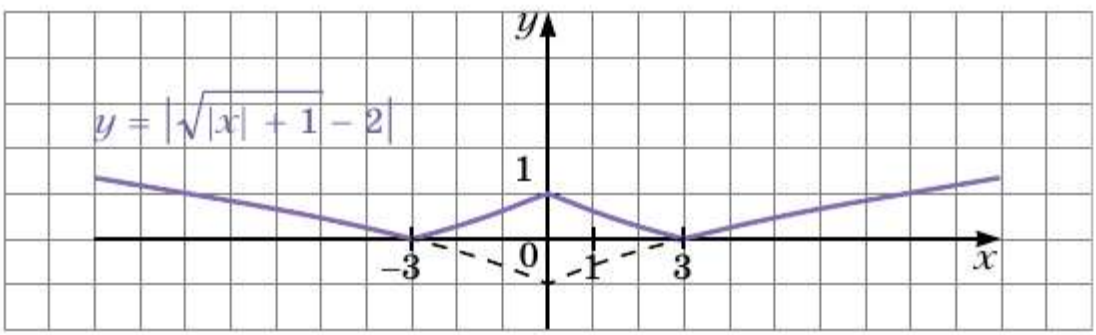
а



б



в



г

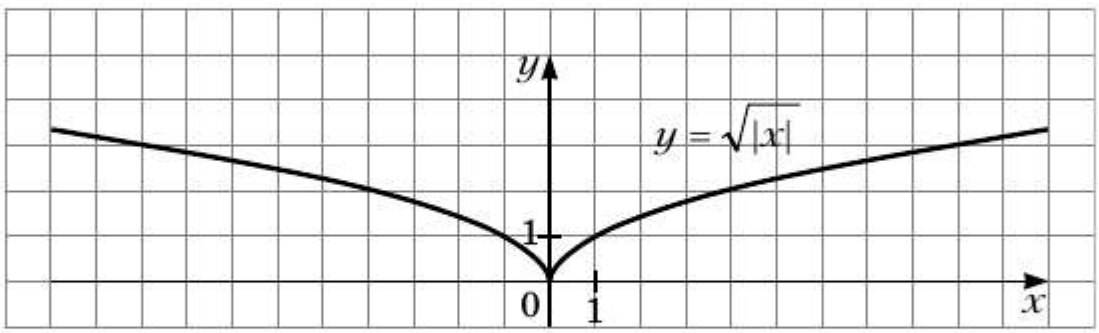
Рис. 6.3

Пример 2. Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

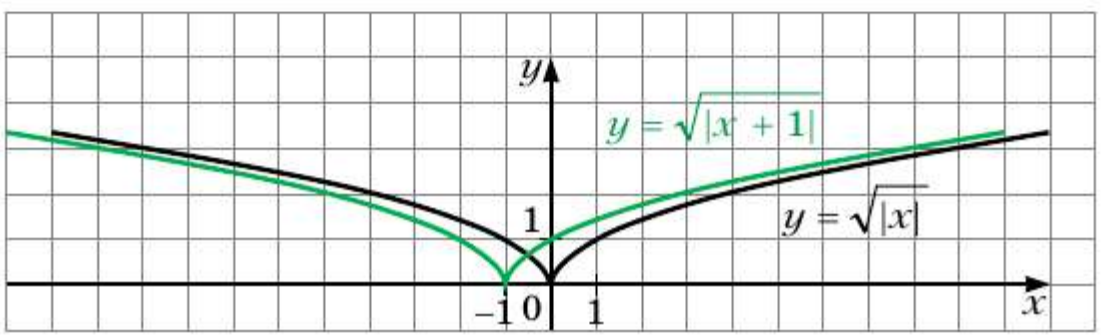
Решение. Построение искомого графика можно представить в виде такой схемы:

$$y = \sqrt{|x|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} - 1 \longrightarrow y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

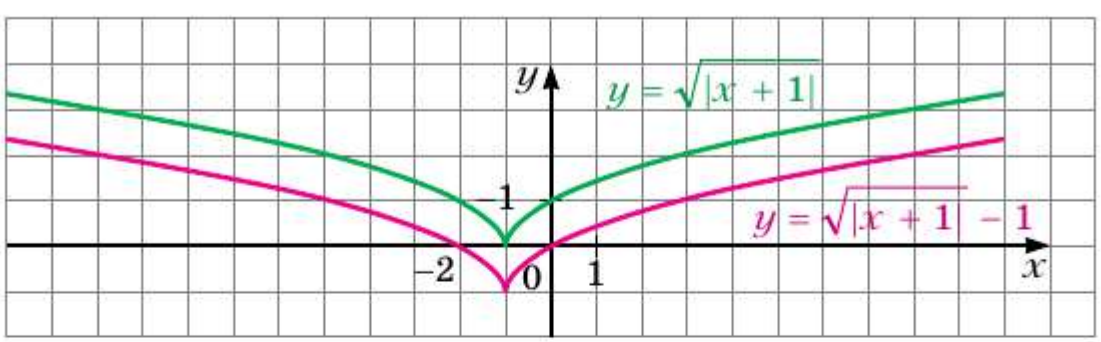
(рис. 6.4). ■



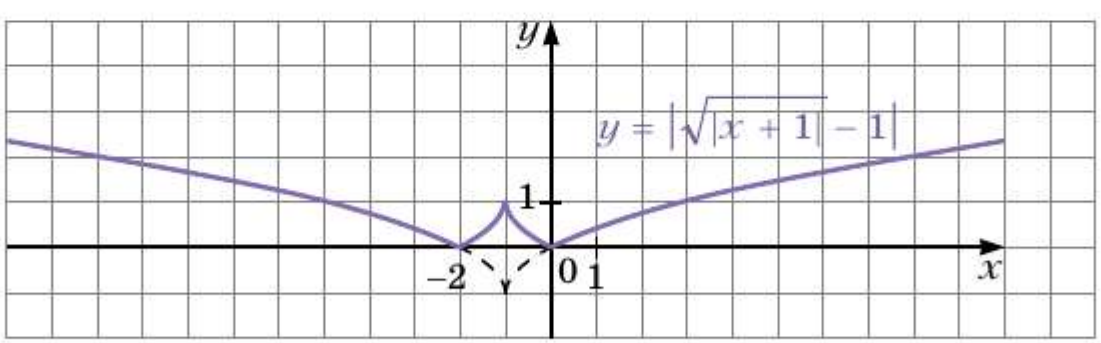
а



б



в



г

Рис. 6.4

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x| - 1| = x - a$ имеет три корня?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |2|x| - 1|$. Проведём построение её графика по такой схеме:

$$y = 2x - 1 \longrightarrow y = 2|x| - 1 \longrightarrow y = |2|x| - 1|.$$

График функции f изображён на рисунке 6.5 красным цветом.

Рассмотрим функцию $g(x) = x - a$. Её графиком является прямая.

Задача сводится к тому, чтобы найти такое положение прямой $g(x) = x - a$, при котором графики функций f и g имеют три общие точки.

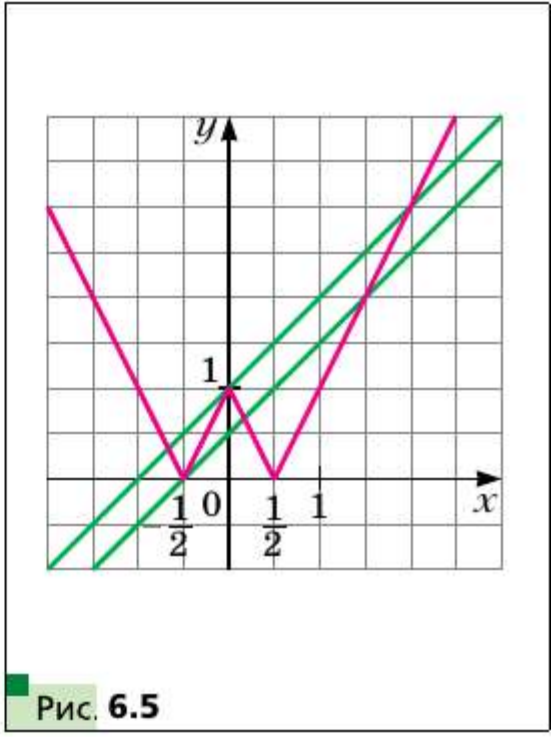


Рис. 6.5

Это условие будет выполнено только тогда, когда прямая $g(x) = x - a$ пройдёт через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ или через точку $(0; 1)$ (рис. 6.5). Найдём значения параметра a, соответствующие этим положениям прямой. Имеем: $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} - a = 0, \\ 0 - a = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2}, \\ a = -1. \end{array}\right.$

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$ или $a = -1$. ■

1. Как можно построить график функции $y = f(|x|)$, используя график функции $y = f(x)$?

2. Как можно построить график функции $y = |f(x)|$, используя график функции $y = f(x)$?

Упражнения

6.1. Постройте график функции:

1) $y = |x^2 - 1|$; 2) $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$; 3) $y = \left|\frac{x - 4}{x + 1}\right|$.

6.2. Постройте график функции:

1) $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$; 2) $y = \left|\frac{4}{x - 2}\right|$; 3) $y = \left|\frac{x + 2}{x - 3}\right|$.

6.3. О функции $y = f(x)$ известно, что $D(f) = [-3; 7]$ и $E(f) = [-6; 5]$. Найдите:

1) область определения функции $y = f(|x|)$;

2) область определения и область значений функции $y = |f(x)|$.

6.4. О функции $y = f(x)$ известно, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, числа -3 и 2 являются её нулями, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. Найдите нули и промежутки знакопостоянства функции: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

6.5. О функции $y = f(x)$ известно, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, числа -1 и 3 являются её нулями, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Найдите нули и промежутки знакопостоянства функции: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

6.6. Постройте график функции:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| + 2}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x| - 3}$.

6.7. Постройте график функции:

1) $y = (|x| + 2)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| - 3}$; 3) $y = \sqrt{2 - |x|}$.

6.8. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{|x + 2|}$; 2) $y = (|x - 2| - 1)^2$; 3) $y = \sqrt{|x - 1| + 2}$.

6.9. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{|x - 3|}$; 2) $y = \sqrt{|x - 2| - 3}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x - 1| - 4}$.

6.10. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $||x| - 1| = a$; 2) $|(|x| - 1)^2 - 1| = a$; 3) $\left|\sqrt{x} - 2\right| = a$?

6.11. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $|x^2 - 1| = a$; 2) $|(x + 2)^2 - 3| = a$; 3) $|(|x| - 2)^2 - 3| = a$?

6.12. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{2|x| - 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - 3|x|}$; 3) $y = \sqrt{|2x - 1|}$.

6.13. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{3|x| + 1}$; 2) $y = \sqrt{|3x + 1|}$.

6.14. Постройте график функции:

1) $y = \left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right|$; 2) $y = \left|\dfrac{4}{|x| - 2}\right|$; 3) $y = |1 - |1 - |x||$.

6.15. Постройте график функции:

1) $y = ||x| - 4|$; 3) $y = |||x - 1| - 1| - 1|$.

2) $y = |2|x| - 4|$;

6.16. Постройте график функции:

1) $y = \left|\sqrt{|x|-1}-1\right|$; 2) $y = \left|\dfrac{1}{|x-2|}-1\right|$; 3) $y = \left|\dfrac{|x|+2}{|x|-1}\right|$.

6.17. Постройте график функции:

1) $y = \left|\sqrt{2|x|-1}-1\right|$; 2) $y = \left|\sqrt{|3x+1|}-2\right|$; 3) $y = \left|\dfrac{|x|-2}{|x|+1}\right|$.

6.18. При каких значениях параметра a уравнение $||x-1|-1| = x-a$ имеет бесконечно много корней?

6.19. При каких значениях параметра a уравнение $||x+2|-3| = a-x$ имеет бесконечно много корней?

6.20. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x-1|-3| = x-a$ имеет три корня?

6.21. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x+1|-2| = a-x$ имеет три корня?

6.22. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x+a|-1| = x-1$ имеет единственный корень?

6.23. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x-a|-2| = 2-x$ имеет единственный корень?

Упражнения для повторения

6.24. Решите неравенство $|x| - |x-3| \leqslant 2x$.

6.25. Решите уравнение $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$.

§ 7 Квадратичная функция, её график и свойства

Определение

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — параметры, причём $a \neq 0$, называют квадратичной.

Квадратичная функция не является для вас новой. Так, в курсе алгебры 8 и 9 классов вы изучали её частные виды — функции $y = x^2$ и $y = ax^2$. Функциональная зависимость площади S круга от его радиуса r определяет квадратичную функцию $S(r) = \pi r^2$, которая является функцией вида $y = ax^2$.

На уроках физики вы ознакомились с формулой $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, которая определяет зависимость высоты h тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Эта формула задаёт квадратичную функцию $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Установим некоторые свойства квадратичной функции.

Если дискриминант D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, то функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ не имеет нулей; если $D = 0$, то функция f имеет один нуль; если $D > 0$, то функция f имеет два нуля.

Если $b = 0$, то функция f является чётной, если $b \neq 0$, функция не является ни чётной, ни нечётной. Докажите это самостоятельно.

Преобразуем выражение $ax^2 + bx + c$.

Имеем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Введём обозначения $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$.

Тогда квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Исследуем функцию f на возрастание и убывание.

Пусть x_1 и x_2, где $x_1 < x_2$, — произвольные значения аргумента функции f из промежутка $(-\infty; x_0]$.

Имеем: $x_1 < x_2 \leqslant x_0$. Рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2)$. Получаем: $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_0)^2 + y_0 - a(x_2 - x_0)^2 - y_0 = a(x_1 - x_2)((x_1 - x_0) + (x_2 - x_0))$.

Поскольку $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 - x_0 < 0$ и $x_2 - x_0 \leqslant 0$, то значение выражения $(x_1 - x_2)((x_1 - x_0) + (x_2 - x_0))$ — положительное число. Таким образом, знак рассматриваемой разности зависит только от знака параметра a:

- если $a < 0$, то $f(x_1) - f(x_2) < 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$, а следовательно, функция f возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$;
- если $a > 0$, то $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. функция f убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$.

Аналогично можно исследовать на возрастание и убывание функцию f на промежутке $[x_0; +\infty)$ и получить такой результат:

- если $a < 0$, то функция f убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$;
- если $a > 0$, то функция f возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$.

Теперь можно сделать такие выводы.

Если $a > 0$, то $f(x_0) \leqslant f(x)$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, при $a > 0$ имеем: $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = f(x_0) = -\dfrac{D}{4a}$.

Если $a < 0$, то $f(x_0) \geqslant f(x)$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, при $a < 0$ имеем: $\max\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = f(x_0) = -\dfrac{D}{4a}$.

В таблице на форзаце учебника приведены свойства квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Покажем, как график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$.

Вы уже строили график квадратичной функции, выделяя квадрат двучлена (см. пример 3 в § 5). Используя эту идею, запишем $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$.

Тогда схема построения искомого графика выглядит так:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ ед.}]{\text{Вправо или влево}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ ед.}]{\text{Вверх или вниз}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

На рисунке 7.1 показано построение для случая, когда $a > 0$, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$. На рисунке 7.2 показано построение для случая, когда $a < 0$, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$.

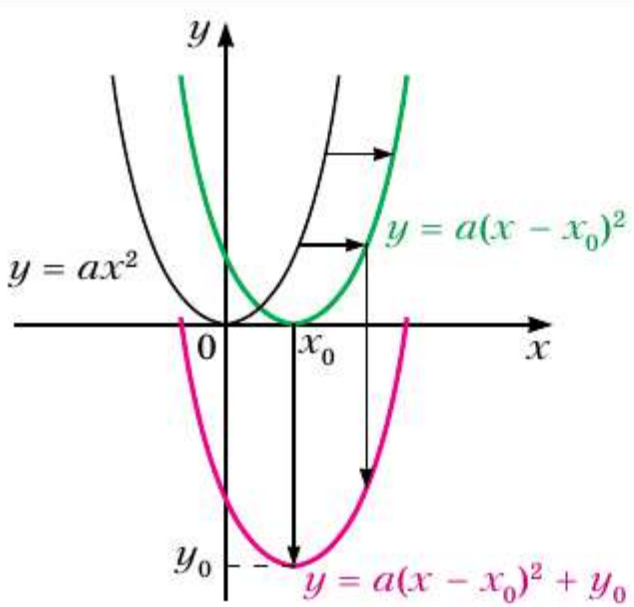


Рис. 7.1

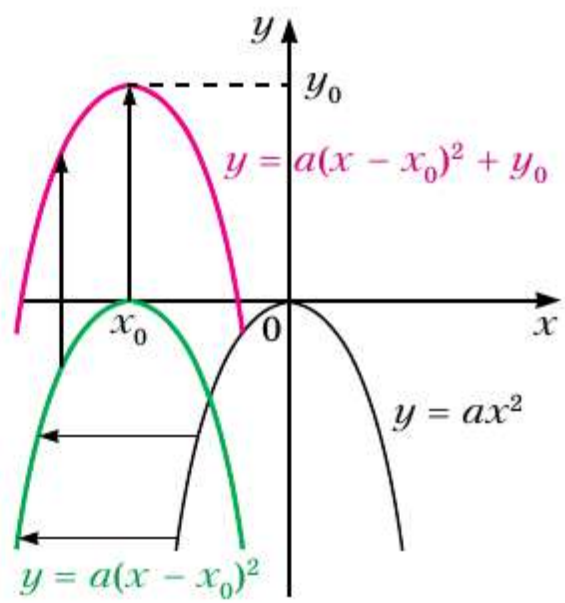


Рис. 7.2

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является фигура, равная параболе $y = ax^2$, т. е. графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$.

Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены так же, как и ветви параболы $y = ax^2$: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Общее представление о графике квадратичной функции дают координаты вершины параболы и направление её ветвей. Это представление будет тем полнее, чем больше точек, принадлежащих графику, мы будем знать. Поэтому график квадратичной функции можно строить, не используя параллельных переносов, действуя по следующей схеме.

1) Найти абсциссу вершины параболы по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) найти ординату вершины параболы по формуле[1] $y_0 = -\frac{D}{4a}$ и отметить на координатной плоскости вершину параболы;

3) определить направление ветвей параболы;

4) вычислить координаты нескольких точек, принадлежащих искомому графику, в частности координаты точек пересечения с осью абсцисс (если данная функция имеет нули), координату точки пересечения с осью ординат; отметить эти точки на координатной плоскости;

5) провести через все отмеченные точки плавную непрерывную линию.

Пример 1. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Пользуясь графиком, найдите промежутки знакопостоянства функции.

Решение. 1) Найдём абсциссу и ординату вершины параболы. Имеем: $x_0 = -\frac{4}{2} = -2$, $y_0 = f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 - 5 = -9$.

2) Точка $(-2; -9)$ — вершина параболы.

3) Ветви параболы направлены вверх.

4) Найдём координаты точек пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение:

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Получим $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Следовательно, парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-5; 0)$ и $(1; 0)$.

---

[1] Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запоминать не обязательно. Достаточно вычислить значение функции $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Найдём координаты точки пересечения параболы с осью ординат. Имеем: $f(0) = -5$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; -5)$.

Отметим найденные четыре точки параболы на координатной плоскости (рис. 7.3).

5) Теперь видим, что целесообразно найти значения данной функции в точках -1, -3, -4 и отметить соответствующие точки на координатной плоскости.

Имеем: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Соединим все отмеченные точки плавной непрерывной линией.

Искомый график изображён на рисунке 7.4.

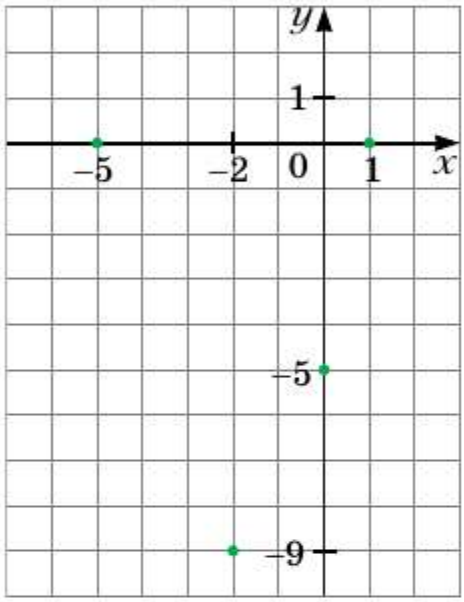


Рис. **7.3**

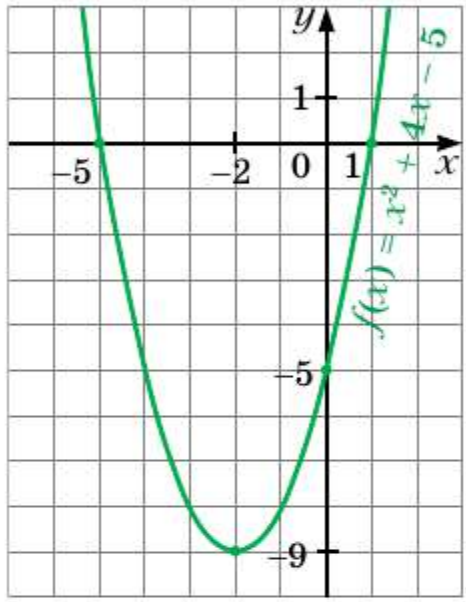


Рис. **7.4**

Имеем: $f(x) > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -5)$ и $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ на промежутке $(-5; 1)$. ■

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{12x}{x^2+1} + 2.$$

Решение. Данная функция определена на множестве $\boldsymbol{R}$. Пусть $\frac{2x}{x^2+1} = t$. В примере 2 § 1 было установлено, что переменная t принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$.

Задача свелась к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции $f(t) = t^2 - 6t + 2$ на промежутке $[-1; 1]$.

Функция f убывает на промежутке $(-\infty; 3]$. Поскольку $[-1; 1] \subset (-\infty; 3]$, то функция f убывает на промежутке $[-1; 1]$. Отсюда $\max\limits_{[-1;\,1]} f(t) = f(-1) = 9$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f(t) = f(1) = -3$.

Эту задачу также можно решить графически. Для этого надо построить график функции $f(t) = t^2 - 6t + 2$, $D(f) = [-1; 1]$ (рис. 7.5). Ординаты точек A и B будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции f на $D(f) = [-1; 1]$. ■

Пример 3. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ на $D(f)$ больше, чем 2?

Решение. Для выполнения условия $\min\limits_{R} f(x) > 2$ необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполнялось неравенство:

$$x^2 + 2x - 1 + |x - a| > 2. \qquad (*)$$

Следовательно, задача сводится к тому, чтобы найти все значения параметра a, при которых неравенство (*) выполняется при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Имеем: $|x - a| > -x^2 - 2x + 3$.

Рассмотрим функции $g(x) = |x - a|$ и $h(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Достаточно найти те значения параметра a, при которых все точки графика функции g (угла, вершина которого расположена на оси абсцисс) находятся выше соответствующих точек графика функции h (параболы с вершиной в точке $(-1; 4)$, ветви которой направлены вниз).

На рисунке 7.6 показаны два положения графика функции g, при которых графики функций h и g имеют одну общую точку. Если вершина угла расположена на оси абсцисс левее точки A или правее точки B, то получаем искомое взаимное расположение графиков функций g и h.

Если вершина угла совпадает с точкой A, то прямая $y = x - a$ имеет с параболой $y = -x^2 - 2x + 3$ одну общую точку. Этому случаю соответству-

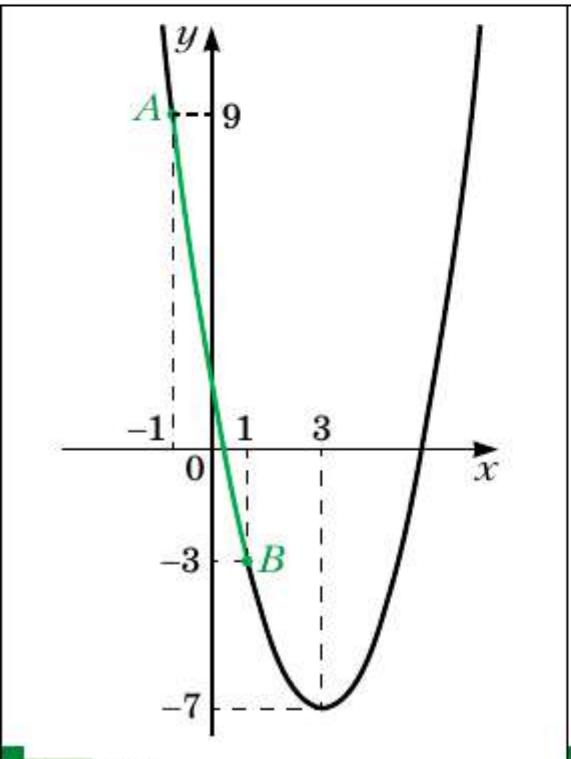


Рис. **7.5**

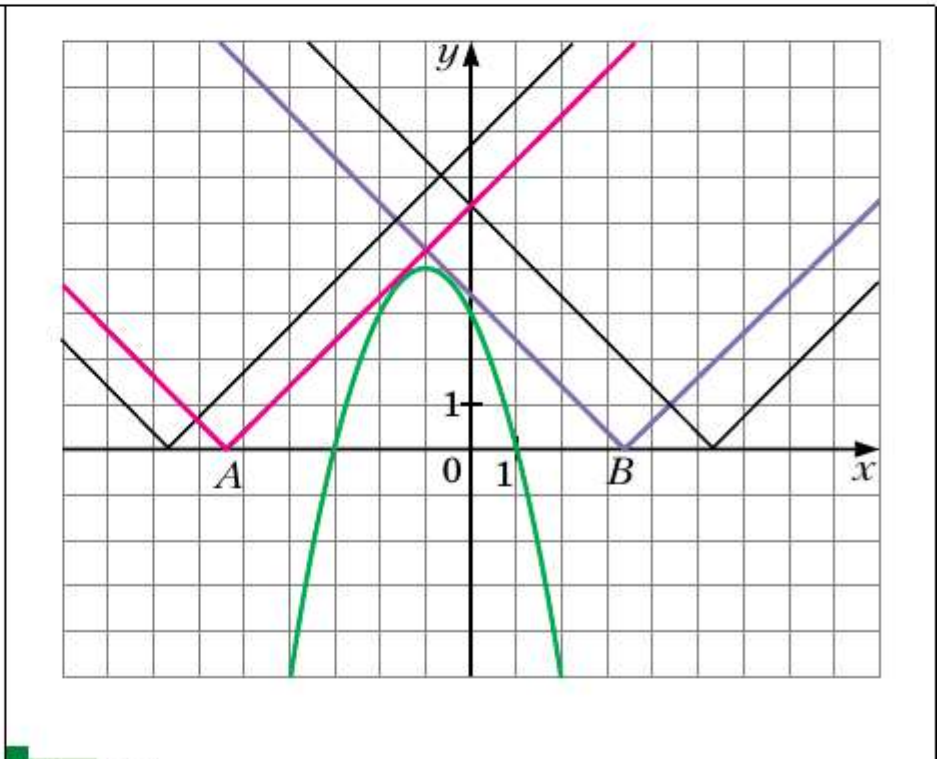


Рис. **7.6**

ют те значения параметра a, при которых уравнение $-x^2 - 2x + 3 = x - a$ имеет единственное решение.

Получаем: $-x^2 - 3x + 3 + a = 0$; $D = 9 + 12 + 4a = 0$. Отсюда $a = -\frac{21}{4}$.

Если вершина угла совпадает с точкой B, то прямая $y = a - x$ имеет с параболой $y = -x^2 - 2x + 3$ одну общую точку. Значение параметра a, соответствующее этому случаю, равно $\frac{13}{4}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Ответ: $a < -\frac{21}{4}$ или $a > \frac{13}{4}$. ■

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 4x - x^2 - 3)(a - 1 - |x - 2|) = 0$ имеет три корня?

Решение. Рассмотрим координатную плоскость xa, т. е. координатную плоскость, каждая точка которой имеет координаты вида $(x; a)$.

Рассматривая данное уравнение как уравнение с двумя переменными x и a, построим его график на координатной плоскости xa.

Переходим к равносильной совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 3, \\ a = |x - 2| + 1. \end{array}\right.$$

Графиком первого уравнения совокупности является парабола с вершиной в точке $(2; -1)$, второго — угол с вершиной в точке $(2; 1)$. Следовательно, графиком исходного уравнения является объединение этих фигур (на рисунке 7.7 график изображён зелёным цветом).

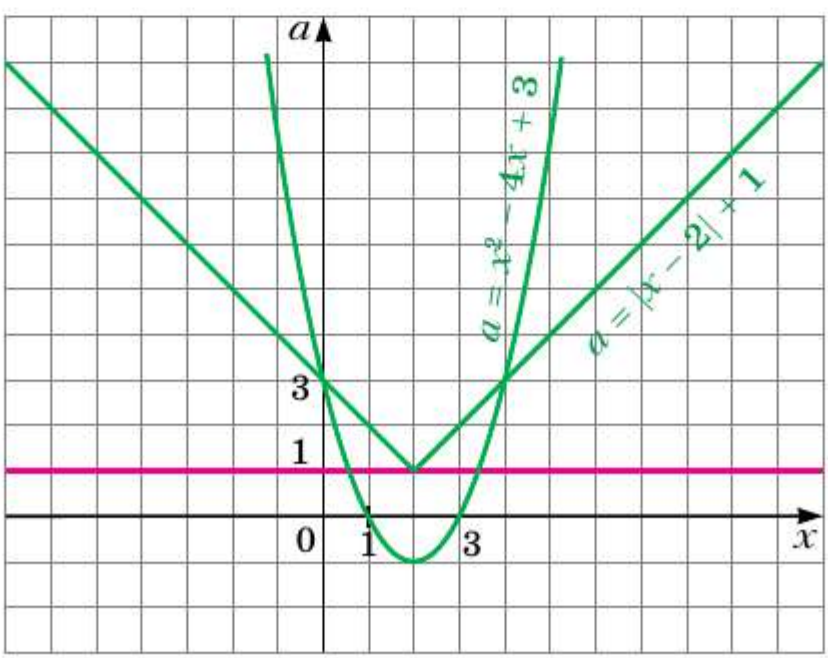


Рис. 7.7

Количество точек пересечения с этим графиком горизонтальной прямой $a = a_1$ соответствует количеству корней данного уравнения при значении параметра a, равном a_1.

Из рисунка 7.7 видно, что только прямая $a = 1$ пересекает график уравнения в трёх точках.

Ответ: $a = 1$. ■

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Перечислите свойства квадратичной функции.
3. Какая фигура является графиком квадратичной функции?
4. По какой формуле можно найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$?
5. Каково направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значения параметра a?
6. Опишите схему построения графика квадратичной функции.

Упражнения

7.1. Определите направление ветвей и координаты вершины параболы:
1) $y = x^2 - 12x + 3$; 2) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

7.2. Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$; 2) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$.

7.3. Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$; 2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

7.4. Постройте график функции:
1) $y = x^2 - 4x - 5$; 4) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
2) $y = -x^2 + 2x + 3$; 5) $y = x^2 - 2x + 4$;
3) $y = 6x - x^2$; 6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$.

7.5. Постройте график функции:
1) $y = x^2 + 2x - 8$; 3) $y = -x^2 + 4x - 5$;
2) $y = x^2 - 2x$; 4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

7.6. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения, а при каких отрицательные.

7.7. Постройте график функции $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Пользуясь графиком, найдите множество решений неравенства $f(x) > 0$.

7.8. Используя графический метод, установите количество корней уравнения $f(x) = g(x)$:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$; $g(x) = -\sqrt{x}$;

2) $f(x) = 4x - 2x^2$; $g(x) = -\dfrac{4}{x}$.

7.9. Используя графический метод, установите количество корней уравнения $x^2 + 4x + 1 = \dfrac{6}{x}$.

7.10. Найдите координаты точки параболы $y = -x^2 + 9x + 9$, у которой:

1) абсцисса и ордината равны;

2) сумма абсциссы и ординаты равна 25.

7.11. Найдите координаты точки параболы $y = 2x^2 - 3x + 6$, у которой ордината на 12 больше абсциссы.

7.12. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 2$ на промежутке:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

7.13. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 8x + 10$ на промежутке:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

7.14. При каких значениях параметров p и q график функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $M(-1; 4)$ и $K(2; 10)$?

7.15. При каких значениях параметров a и b нулями функции $y = ax^2 + bx + 7$ являются числа -2 и 3?

7.16. При каких значениях параметров a и b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходит через точки $C(-3; 8)$ и $D(1; 4)$?

◆ ◆

7.17. Пусть D — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0$, $D > 0$, $c > 0$, $-\dfrac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0$, $D = 0$, $-\dfrac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0$, $D < 0$, $-\dfrac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0$, $c = 0$, $-\dfrac{b}{2a} < 0$.

7.18. Пусть D — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0$, $D < 0$, $-\dfrac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0$, $D > 0$, $c < 0$, $-\dfrac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0$, $D = 0$, $-\dfrac{b}{2a} < 0$.

7.19. Найдите все значения параметра a, при которых вершина параболы $y = -x^2 + 6x - a$ принадлежит оси абсцисс.

7.20. При каком значении параметра b промежуток $(-\infty; 2]$ является промежутком возрастания функции $y = -4x^2 - bx + 5$?

7.21. При каком значении параметра b промежуток $(-\infty; -3]$ является промежутком убывания функции $y = 3x^2 + bx - 8$?

7.22. При каких значениях параметра a функция $y = 2x^2 - 4ax + 3$ возрастает на промежутке $[-1; 4]$?

7.23. При каких значениях параметра a функция $y = -x^2 - 2ax + 1$ убывает на промежутке $[-3; -2]$?

7.24. При каком значении параметра a график функции $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ имеет с осью абсцисс одну общую точку?

7.25. При каком значении параметра c наибольшее значение функции $y = -5x^2 + 10x + c$ равно -3?

7.26. При каком значении параметра c наименьшее значение функции $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ равно -1?

7.27. При каких значениях параметра c вершина параболы $y = x^2 - 8x + c$ расположена выше прямой $y = -2$?

7.28. При каких значениях параметра a прямая $y = x - 1$ имеет с параболой $y = x^2 - 2ax + 3$ одну общую точку?

7.29. При каких значениях параметра a прямая $y = -x + 4$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x - a$ одну общую точку?

7.30. На рисунке 7.8 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

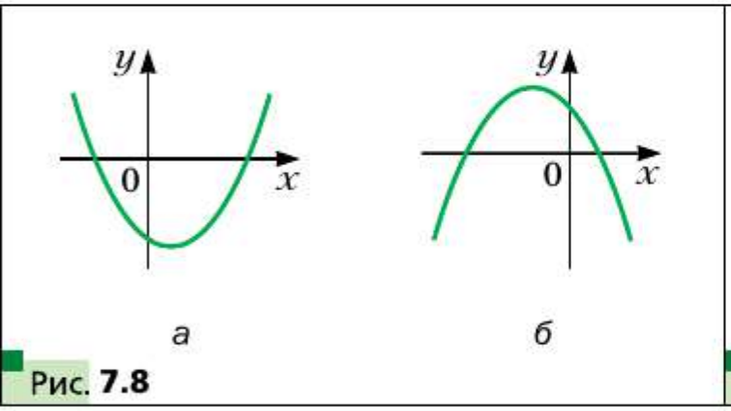


Рис. **7.8**

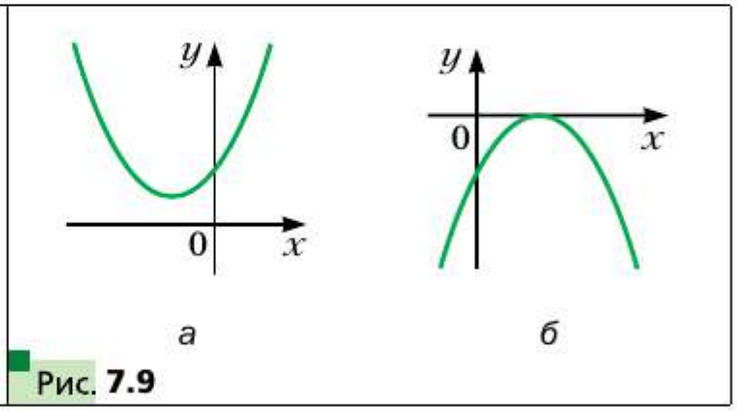


Рис. **7.9**

7.31. На рисунке 7.9 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

7.32. Могут ли графики квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = cx^2 + bx + a$ быть расположены так, как показано на рисунке 7.10?

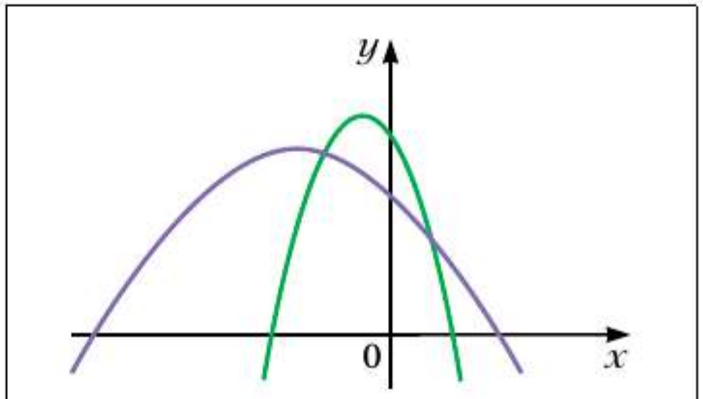


Рис. **7.10**

7.33. График квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a + b + c > 0$, не имеет общих точек с осью абсцисс. Определите знак параметра c.

7.34. О квадратичной функции f известно, что $f(-3) = f(7)$. Найдите все значения x, при которых $f(x) = f(3)$.

7.35. При каких значениях параметра a вершина параболы $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ равноудалена от осей координат?

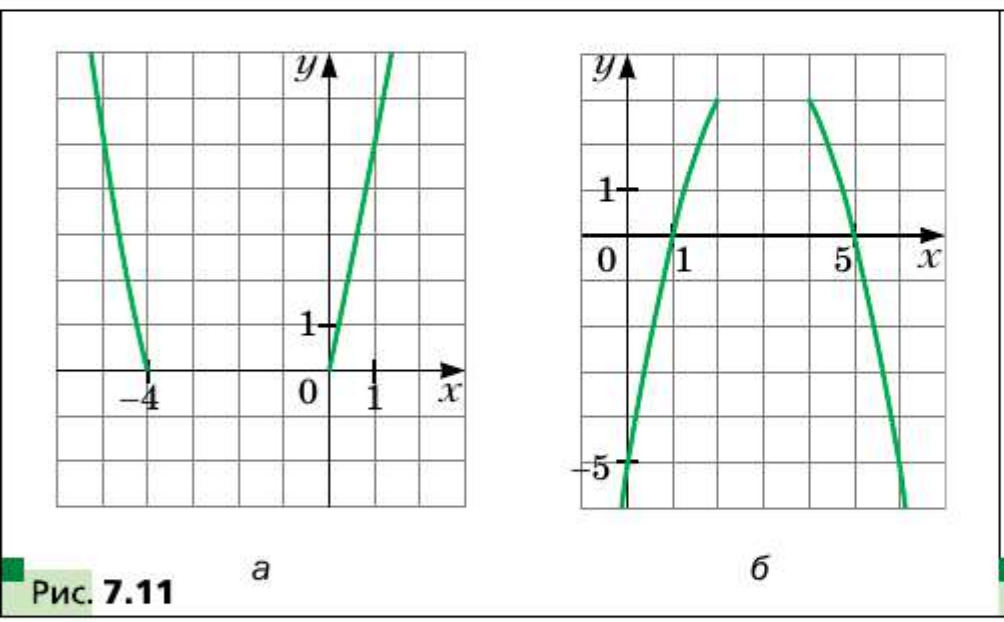
7.36. При каких значениях параметра a вершина параболы $y = x^2 - 6ax + 4 + 8a^2$ находится во второй четверти?

7.37. При каких значениях коэффициентов p и q вершина параболы $y = x^2 + px + q$ находится в точке $A(2; 5)$?

7.38. Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится в точке $C(4; -10)$, парабола проходит через точку $D(1; -1)$. Найдите значения коэффициентов a, b и c.

7.39. Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображён на рисунке 7.11.

7.40. Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображён на рисунке 7.12.



а б

Рис. **7.11**

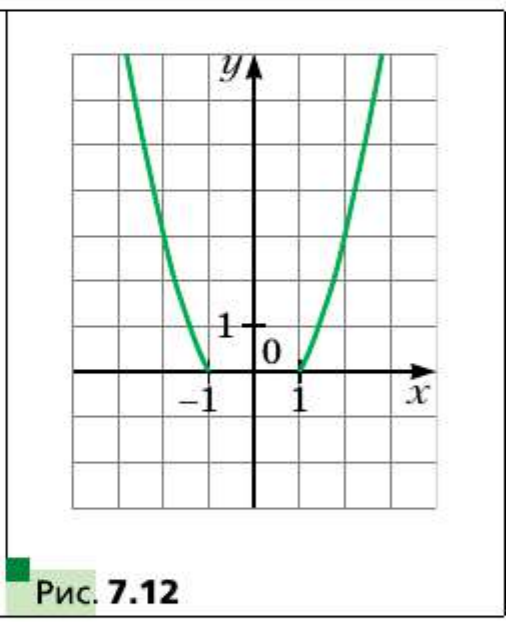


Рис. **7.12**

7.41. Постройте график функции:

1) $y = |x^2 - 2|x||$; 2) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

7.42. Постройте график функции:

1) $y = |x^2 - 3|x||$; 2) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

7.43. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$; 3) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

7.44. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{(x + 3)^3}{x + 3}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$; 3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

7.45. Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 4|x - 1| - 1$;

2) $y = \frac{x}{|x|}(x^2 - x - 6)$;

3) $y = x^2 + 3x \cdot \frac{|x - 3|}{x - 3} - 4$.

7.46. Постройте график функции:

1) $y = 6|x| - x^2$;

2) $y = x^2 + 3|x - 1| - 1$;

3) $y = \frac{x^3}{|x|} + 4x$.

7.47. Установите, сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $|x^2 - 4|x| + 3| = a$;

2) $x^2 + 3|x - 1| - 1 = a$.

7.48. Установите, сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $|x^2 - 2|x| - 3| = a$;

2) $x^2 - 4|x - 1| - 1 = a$.

◆ ◆ ◆

7.49. О квадратичной функции f известно, что существует ровно три значения аргумента, при которых модуль значения функции равен 2. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 1{,}1$?

7.50. Могут ли графики квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = bx^2 + cx + a$ быть расположены так, как показано на рисунке 7.13?

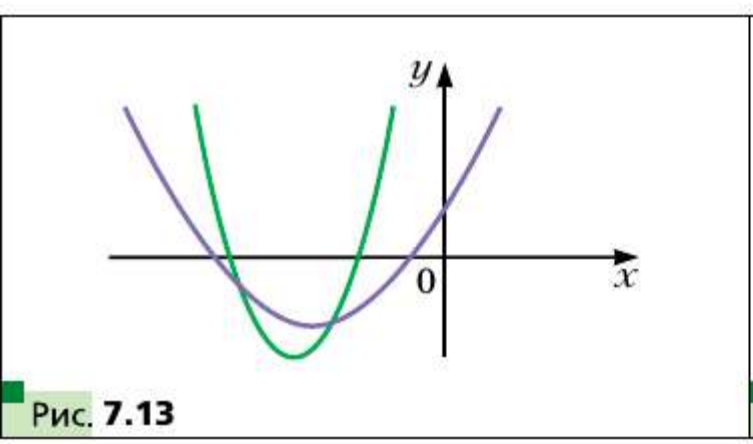


Рис. **7.13**

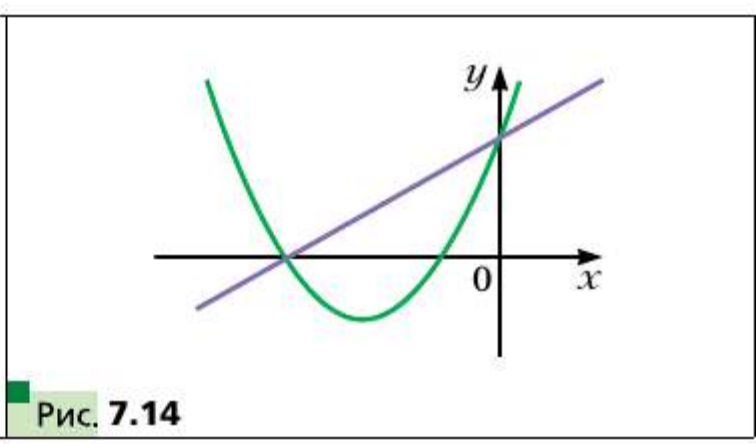


Рис. **7.14**

7.51. Могут ли графики квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и линейной функции $y = cx + a$ быть расположены так, как показано на рисунке 7.14?

7.52. Известно, что $2p - q = 4$. Докажите, что все параболы вида $y = x^2 + px + q$ проходят через одну точку.

7.53. Функция $f(x) = x^2 + px + q$ принимает только неотрицательные значения. Найдите наименьшее значение выражения $p + q$.

7.54. Параметр a принимает все действительные значения. Докажите, что вершины парабол $f(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$ образуют прямую.

7.55. Параметр a принимает все действительные значения. Докажите, что вершины парабол $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$ образуют параболу.

7.56. Дана функция $f(t) = t^2 - 2t$. Постройте график функции g, если $g(x) = \min\limits_{[x-1;\,x]} f(t)$.

7.57. Дана функция $f(t) = -t^2 - 2t$. Постройте график функции g, если $g(x) = \max\limits_{[x;\,x+1]} f(t)$.

7.58. Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 2$ на $D(f)$.

7.59. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 4x + 3| + x - a = 0$ имеет три корня?

7.60. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 3 + |x - a|$ на $\boldsymbol{R}$ меньше чем 2?

7.61. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a + 1 = 0$ будет наименьшей?

7.62. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 4 = 0$ будет наименьшим?

7.63. Определите количество корней уравнения $x^4 + 2ax^2 - x + a^2 + a = 0$ в зависимости от значения параметра a.

7.64. На координатной плоскости xy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из парабол вида $y = x^2 - 4ax + 2a^2 - 3$.

7.65. Функция $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет два нуля, один из которых принадлежит промежутку $(0;\ 1)$, а другой не принадлежит этому промежутку. Докажите, что $f(c) \leqslant 0$.

7.66. Рассматриваются все параболы вида $y = x^2 + px + q$, $q > 0$, которые пересекают оси координат в трёх точках. Для каждой параболы через указанные три точки проводят окружность. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку.

7.67. Рассматриваются все параболы вида $y = x^2 + px + q$, $q < 0$, которые пересекают оси координат в трёх точках. Для каждой параболы через указанные три точки проводят окружность. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку.

7.68. Докажите, что при всех $a \in [0;\ 1]$, $b \in [0;\ 1]$, $c \in [0;\ 1]$ выполняется неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant a^2b + b^2c + c^2a + 1$.

Упражнения для повторения

7.69. Решите неравенство $|x^2 - 9|(x + 2) < 0$.

7.70. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$.

На рисунке 8.1 изображён график некоторой функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество действительных чисел.

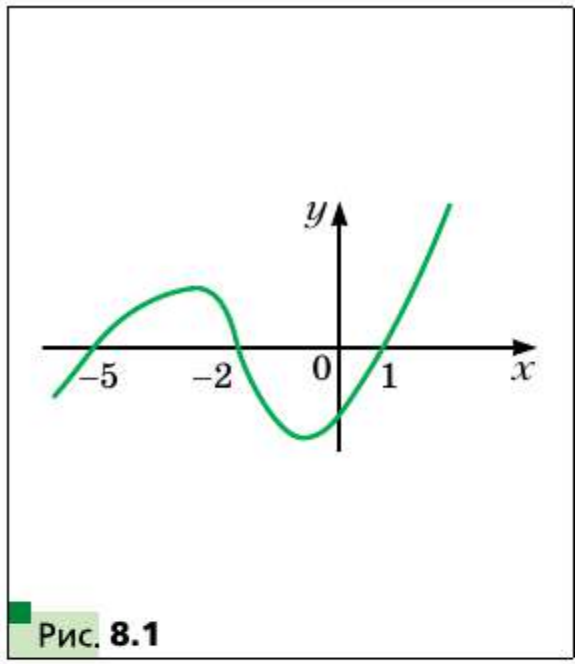


Рис. 8.1

С помощью этого графика легко определить промежутки знакопостоянства функции f, а именно: $y > 0$ на каждом из промежутков $(-5; -2)$ и $(1; +\infty)$; $y < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -5)$ и $(-2; 1)$.

Определив промежутки знакопостоянства функции f, мы тем самым решили неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Множеством решений неравенства $f(x) > 0$ является множество $(-5; -2) \cup (1; +\infty)$. Множеством решений неравенства $f(x) < 0$ является множество $(-\infty; -5) \cup (-2; 1)$.

Такой метод решения неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ с помощью графика функции $y = f(x)$ называют **графическим**.

Покажем, как с помощью этого метода решают **квадратные неравенства**.

Определение

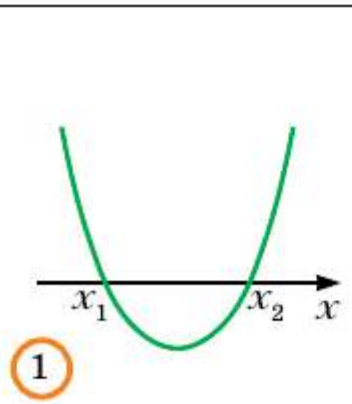
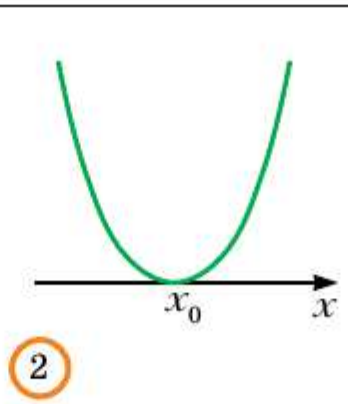
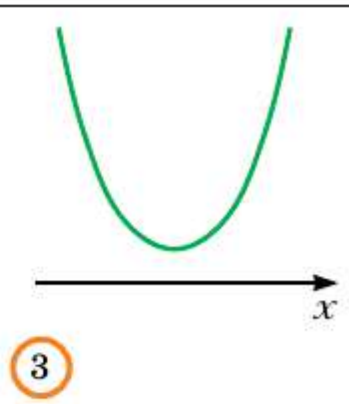
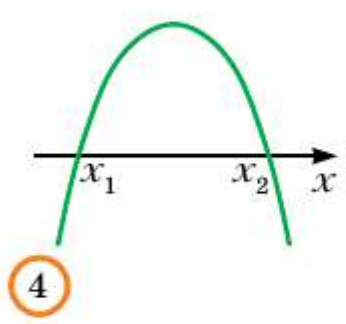
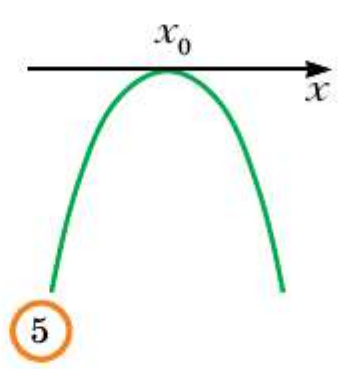
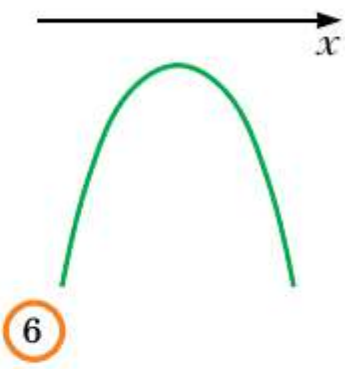
Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где x — переменная, a, b и c — параметры, причём $a \neq 0$, называют квадратными.

Выясним, как определить положение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс.

Напомним, что знак дискриминанта D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ определяет количество нулей квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Если $D > 0$, то нулей у функции два; если $D = 0$, то функция имеет один нуль; если $D < 0$, то нулей нет.

Знак старшего коэффициента квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ определяет направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

Схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков параметров a и D отображено в таблице (x_1 и x_2 — нули функции, x_0 — абсцисса вершины параболы):

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Разъясним, как эту таблицу можно использовать для решения квадратных неравенств.

Пусть, например, надо решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где $a < 0$ и $D > 0$. Условиям $a < 0$ и $D > 0$ соответствует ячейка (4) таблицы. Ответом будет промежуток $(x_1; x_2)$, на котором график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ расположен над осью абсцисс.

Пример 1. Решите неравенство $2x^2 - x - 1 > 0$.

Решение. Для квадратного трёхчлена $2x^2 - x - 1$ имеем: $a = 2$, $D = 9$. Этим условиям соответствует ячейка (1) таблицы. Решим уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$. Получаем $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Эти числа являются нулями функции $y = 2x^2 - x - 1$. Тогда схематически график функции $y = 2x^2 - x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 8.2.

Из рисунка 8.2 видно, что соответствующая квадратичная функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(1; +\infty)$.

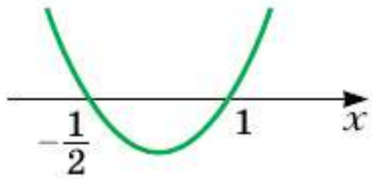


Рис. 8.2

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. ■

Пример 2. Решите неравенство $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Решение. Имеем: $a = -9$, $D = 0$. Этим условиям соответствует ячейка (5) таблицы. Устанавливаем, что $x_0 = \frac{1}{3}$. Тогда схематически график функции $y = -9x^2 + 6x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 8.3.

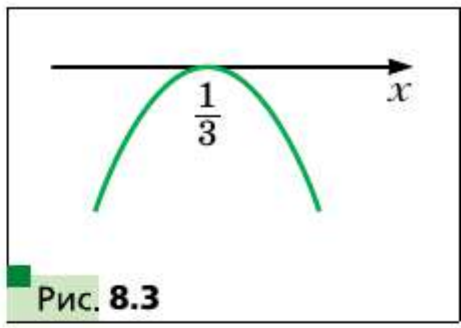


Рис. 8.3

Из рисунка 8.3 видно, что решениями неравенства являются все числа, кроме $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. ■

Заметим, что это неравенство можно решить другим способом. Запишем неравенство, равносильное данному: $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Отсюда $(3x - 1)^2 > 0$. Решением этого неравенства является множество, указанное в ответе.

Пример 3. Решите неравенство $3x^2 - x + 1 < 0$.

Решение. Имеем: $a = 3$, $D = -11$. Этим условиям соответствует ячейка (3) таблицы. В этом случае график функции $y = 3x^2 - x + 1$ не имеет точек с отрицательными ординатами.

Ответ: $\varnothing$. ■

Пример 4. Решите неравенство $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.

Решение. Имеем: $a = 0{,}2$, $D = 0$. Этим условиям соответствует ячейка (2) таблицы. В этом случае квадратичная функция принимает только неотрицательные значения. Следовательно, данное неравенство имеет единственное решение x_0. Устанавливаем, что $x_0 = -5$.

Ответ: $\{-5\}$. ■

Пример 5. Решите неравенство $2|x - 2| \leqslant 2x^2 - 5x - 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 4 \leqslant 2x^2 - 5x - 1, \\ 2x - 4 \geqslant -2x^2 + 5x + 1. \end{cases} \text{ Отсюда } \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \geqslant 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

С помощью рисунка 8.4 устанавливаем, что множеством решений первого неравенства системы является множество $M_1 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

Множество $M_2 = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$ является множеством решений второго неравенства системы (рис. 8.5).

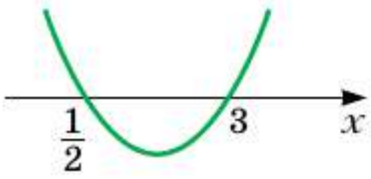


Рис. 8.4

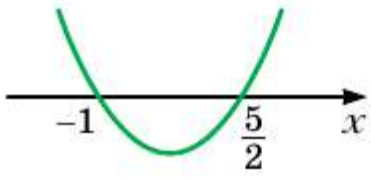


Рис. 8.5

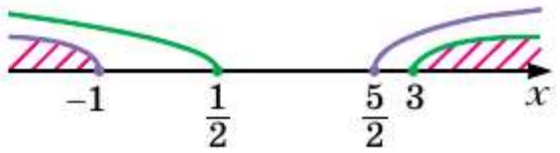


Рис. 8.6

Множеством решений системы является множество $M_1 \cap M_2$. Его найдём с помощью рисунка 8.6.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. ■

Пример 6. Решите неравенство $x|2x-3| < 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3<0,\\ x(3-2x)<2,\end{cases}\\ \begin{cases}2x-3\geqslant 0,\\ x(2x-3)<2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{3}{2},\\ 2x^2-3x+2>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2},\\ 2x^2-3x-2<0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{3}{2},\\ x\in \boldsymbol{R},\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant\frac{3}{2},\\ -\frac{1}{2}<x<2;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x<\frac{3}{2},\\ \frac{3}{2}\leqslant x<2;\end{array}\right.$ $x<2.$

Ответ: $(-\infty; 2)$. ■

Пример 7. При каких значениях параметра a неравенство $(a-1)x^2+4ax-2a-4\geqslant 0$ имеет единственное решение?

Решение. Если $a = 1$, то данное неравенство принимает вид $4x - 6 \geqslant 0$ и имеет бесконечно много решений. Следовательно, $a = 1$ не подходит.

Для случая, когда $a \neq 1$, рассмотрим квадратичную функцию $y = (a-1)x^2 + 4ax - 2a - 4$.

Если $a - 1 > 0$, то этому условию соответствуют ячейки (1) – (3) таблицы. Тогда множество значений аргумента, при которых квадратичная функция принимает неотрицательные значения, бесконечно.

Если $a - 1 < 0$, то условию единственности решения соответствует ячейка (5) таблицы. Следовательно, искомыми значениями параметра a являются решения системы $\begin{cases} a-1<0, \\ D=0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} a-1<0, \\ 24a^2+8a-16=0. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $a=-1$ или $a=\frac{2}{3}$.

Ответ: $a=-1$ или $a=\frac{2}{3}$. ■

Пример 8. Известно, что $c(a+b+c)<0$. Докажите, что $b^2>4ac$.

Решение. *Способ 1.* Если $a=b=0$, то из условия следует, что $c^2<0$. Следовательно, числа a и b не могут быть равными нулю одновременно.

Пусть $a=0$. Тогда $b\neq 0$, и неравенство $b^2>4ac$ становится очевидным.

Пусть $a\neq 0$. Тогда рассмотрим квадратичную функцию $f(x)=ax^2+bx+c$.

Имеем: $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$.

Из условия следует, что $f(0)f(1)<0$, т. е. квадратичная функция f в точках $x=0$ и $x=1$ принимает значения разных знаков. Тогда её графику соответствует ячейка (1) или (4) таблицы. Следовательно, функция f имеет два нуля. Поэтому дискриминант квадратного трёхчлена ax^2+bx+c положителен, т. е. $b^2>4ac$.

Способ 2. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x)=x^2+bx+ac$. Имеем: $f(c)=c^2+bc+ac=c(a+b+c)$. Следовательно, $f(c)<0$. Ветви параболы $f(x)=x^2+bx+ac$ направлены вверх, и существует значение аргумента, при котором функция f принимает отрицательное значение. Тогда графику функции соответствует ячейка (1) таблицы. Поэтому дискриминант квадратного трёхчлена $x^2+bx+ac$ положителен, т. е. $b^2>4ac$. ■

1. Какие неравенства называют квадратными?

2. Какие возможны случаи расположения параболы $y=ax^2+bx+c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков a и D, где D — дискриминант квадратного трёхчлена ax^2+bx+c? Изобразите схематически эти случаи.

Упражнения

8.1. Решите неравенство:

1) $x^2+6x-7<0$; 2) $x^2-2x-48\geqslant 0$;

3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
6) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
7) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
8) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
9) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
10) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
11) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
12) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.

8.2. Решите неравенство:

1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
6) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
7) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
8) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
9) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

8.3. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 \leqslant 49$; 2) $x^2 > 5$; 3) $7x^2 \leqslant 4x$; 4) $0{,}9x^2 < -27x$.

8.4. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 > 1$; 2) $x^2 < 3$; 3) $-3x^2 \geqslant -12x$; 4) $-2x^2 < -128$.

8.5. Решите неравенство:

1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \leqslant x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
4) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$.

8.6. Решите неравенство:

1) $2(x^2 + 2) \geqslant x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$.

8.7. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $42 - x^2 - x > 0$;
2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

8.8. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$;
2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

8.9. Составьте какое-нибудь неравенство, множество решений которого:

1) объединение промежутков $(-\infty; -4)$ и $(8; +\infty)$;
2) промежуток $[-2; 9]$;
3) состоит из одного числа 7.

8.10. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$;
2) $y = \frac{x + 2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$.

8.11. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

8.12. Равносильны ли неравенства:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ и $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;

2) $\dfrac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ и $\dfrac{1}{x^2 - x - 20} \leqslant 0$;

3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ и $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;

4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ и $-2x^2 - 4 > 0$?

8.13. При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:

1) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$; 2) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?

8.14. При каких значениях параметра b имеет два различных корня уравнение:

1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

◆ ◆

8.15. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

8.16. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

8.17. Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - \left(\sqrt{5} - 3\right)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

8.18. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \dfrac{9}{x^2 - 81}$;

2) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \dfrac{8}{x - 5}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}$.

8.19. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{8 - 4x}}$; 2) $y = \dfrac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \dfrac{x - 1}{|x| - 6}$.

8.20. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0$; 3) $x^2 - 8|x| + 15 \leqslant 0$;

2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$; 4) $4x^2 - 5|x| + 1 > 0$.

8.21. Найдите множество решений неравенства:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0$; 3) $6x^2 - 5|x| + 1 < 0$.

2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0$;

8.22. Решите неравенство:

1) $|x^2 - x - 3| < 9$;
2) $|x^2 - 4| < 3x$;
3) $x^2 - 5x + 9 > |x - 6|$;
4) $|4x - 3| \geqslant x^2 - 3x + 3$;
5) $|3x - 2|x < 1$;
6) $|x - 4|(x + 2) \geqslant 4x$.

8.23. Решите неравенство:

1) $|x^2 + 5x| < 6$;
2) $|x^2 + 3x| < x + 4$;
3) $x^2 - x - 2 < |5x - 3|$;
4) $|x^2 - 3x| \geqslant x + 5$;
5) $x|3x - 1| < -2$;
6) $x^2 + |x - 3| - 9 < 0$.

8.24. При каких значениях параметра a данное неравенство выполняется при всех действительных значениях x:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$;
4) $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$?

8.25. При каких значениях параметра a не имеет решений неравенство:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)x + (a - 1) < 0$;
4) $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$?

8.26. При каких значениях параметра a функция $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x?

8.27. При каких значениях параметра a функция $y = -4x^2 - 16x + a$ принимает отрицательные значения при всех действительных значениях x?

8.28. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + (2 - a)x + 3 - 2a \leqslant 0$ имеет единственное решение?

8.29. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

8.30. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

8.31. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - 4x + 3 < 0$ является следствием неравенства $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a < 0$?

8.32. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + x - 2 < 0$ является следствием неравенства $x^2 - (2a - 1)x - 3a^2 + a < 0$?

8.33. При каких значениях параметра a из неравенства $x^2 - x < 0$ следует неравенство $x^2 - (2a + 3)x + a^2 + 3a \leqslant 0$?

8.34. При каких значениях параметра a из неравенства $x^2 + x < 0$ следует неравенство $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a \leqslant 0$?

8.35. Известно, что $b^2 - 4ac = 0$ и $a + b + c < 0$. Решите квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

8.36. Известно, что $b^2 - 4ac < 0$ и $a + c > b$. Решите квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$.

8.37. При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение:

1) $\dfrac{x^2 - (4 + 3a)x + 12a}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$; 2) $\dfrac{x^2 - 3ax - 3a - 1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} = 0$?

8.38. При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение:

1) $\dfrac{x^2 - (5 + 2a)x + 10a}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$; 2) $\dfrac{x^2 - (2a + 2)x + 6a - 3}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 0$?

8.39. Известно, что $(a + b + c)(a - b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

8.40. Известно, что $a(a + b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

8.41. Решите уравнение $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

8.42. Решите уравнение $x^2 - 6[x] + 5 = 0$.

Упражнения для повторения

8.43. Для каждого значения параметра a решите уравнение $(x^2 + 4x - 5)\left(\sqrt{x} - a\right) = 0$.

8.44. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - 4x - 2 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $|x_2 - x_1|$.

§ 9 Решение неравенств методом интервалов

На рисунке 9.1 изображён график некоторой функции f, у которой $D(f) = \boldsymbol{R}$ и нулями являются числа x_1, x_2 и x_3. Эти числа разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

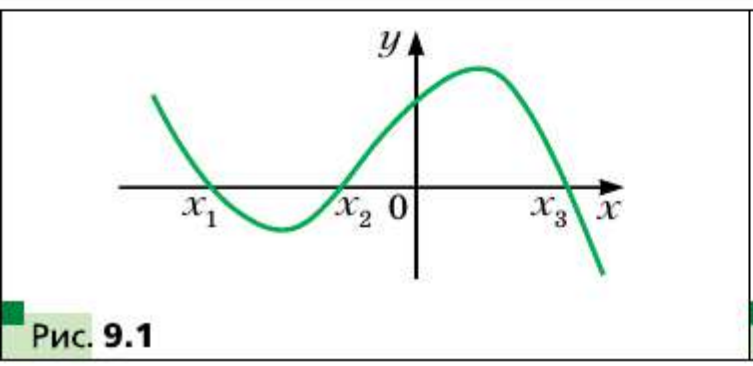


Рис. 9.1

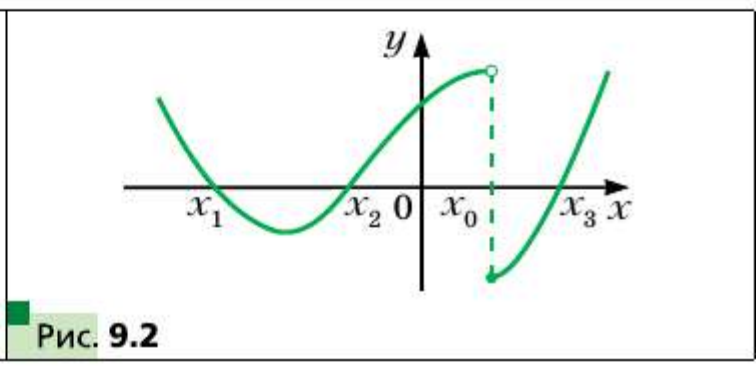


Рис. 9.2

А всегда ли нули функции разбивают её область определения на промежутки знакопостоянства? Ответ на этот вопрос отрицательный. Для функции g, график которой изображён на рисунке 9.2, промежуток $(x_2; x_3)$ не является промежутком знакопостоянства. Действительно, если $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а если $x \in [x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Принципиальное различие между функциями f и g состоит в том, что графиком функции f является **непрерывная кривая**, а график функции g таким свойством не обладает. Говорят, что функция f **непрерывна в каждой точке области определения**, или **непрерывна на $D(f)$**, а функция g не является непрерывной на $D(g)$ и **в точке x_0 имеет разрыв**.

Так, функция $y = \{x\}$ (рис. 9.3) имеет разрыв в каждой точке x такой, что $x \in Z$. При этом, например, в каждой точке промежутка (0; 1) эта функция является непрерывной, т. е. функция непрерывна на этом промежутке.

Такое представление о непрерывной функции интуитивно понятно. Более детально с этим понятием вы ознакомитесь в курсе алгебры и начал анализа 10 класса. Для дальнейших рассуждений важна следующая теорема.

Теорема 9.1

Если функция f непрерывна на некотором промежутке и не имеет на нём нулей, то она на этом промежутке сохраняет постоянный знак.

Например, функция $y = \{x\}$ непрерывна на промежутке (0; 1) и не имеет нулей на этом промежутке. Она на этом промежутке принимает только положительные значения, т. е. сохраняет постоянный знак.

Теорема 9.1 позволяет без построения графика функции f решать неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Представим, что с рисунка 9.1 «исчезли» все точки графика функции f, за исключением точек $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 9.4). Каждый из промежутков $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не содержит нулей функции f.

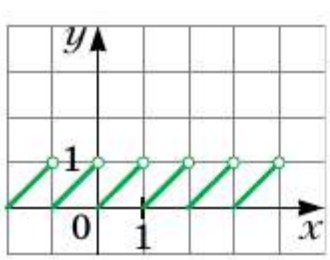


Рис. 9.3

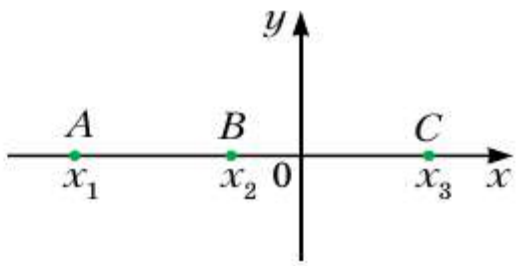


Рис. 9.4

Функция f непрерывна на этих промежутках. Следовательно, в силу теоремы 9.1 указанные промежутки являются промежутками знакопостоянства функции f.

Остаётся лишь выяснить, какой знак принимают значения функции f на каждом из этих промежутков. Это можно сделать с помощью «пробных точек».

Пусть, например, $a \in (-\infty; x_1)$ и вычисления показали, что $f(a) > 0$. Тогда для любого $x \in (-\infty; x_1)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. Выбирая по одной точке на каждом промежутке знакопостоянства и находя значение функции в этой точке, можно определить знак функции на рассматриваемых промежутках.

Описанный метод решения неравенств называют **методом интервалов.**

Следующая теорема показывает, что многие из знакомых вам функций являются непрерывными на области определения.

Теорема 9.2

Функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, непрерывна на $D(y)$.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке множества $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, т. е. на $D(y)$.

Эта теорема позволяет для неравенства вида $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ или $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, применять метод интервалов.

Пример 1. Решите неравенство $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Решение. Числа -3, 1 и 2 являются нулями функции $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$, непрерывной на $D(f) = \boldsymbol{R}$. Поэтому эти числа разбивают множество $\boldsymbol{R}$ на промежутки знакопостоянства функции f: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 9.5).

С помощью «пробных точек» определим знаки функции f на указанных промежутках.

Имеем:

$-4 \in (-\infty; -3)$; $f(-4) < 0$, поэтому $f(x) < 0$ при любом $x \in (-\infty; -3)$;

$0 \in (-3; 1)$; $f(0) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при любом $x \in (-3; 1)$;

$\dfrac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$, поэтому $f(x) < 0$ при любом $x \in (1; 2)$;

$3 \in (2; +\infty)$; $f(3) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при любом $x \in (2; +\infty)$.

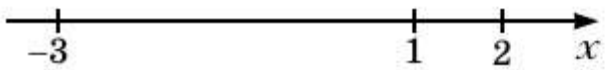


Рис. **9.5**

Рис. **9.6**

Результаты исследования знака функции f показаны на рисунке 9.6.

Ответ: $(-3;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$. ■

Замечание. При оформлении решения неравенств исследовать знак функции на промежутках можно устно, фиксируя результаты в виде схемы, показанной на рисунке 9.6.

Пример 2. Решите неравенство $(x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 > 0$.

Решение. Функция $f(x) = (x + 1)(3 - x)(x - 2)^2$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Отметим на координатной прямой её нули (рис. 9.7). Они разбивают множество $D(f) = \boldsymbol{R}$ на промежутки знакопостоянства функции f.

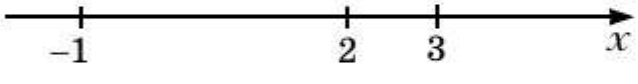


Рис. **9.7**

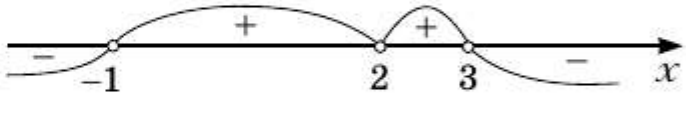


Рис. **9.8**

Исследуем знак функции f на каждом из этих промежутков. Результат исследования показан на рисунке 9.8.

Ответ: $(-1;\ 2) \cup (2;\ 3)$. ■

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Решение. Областью определения функции $f(x) = \dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ является множество $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$. Функция f непрерывна на каждом из промежутков $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ 4\right)$, $(4;\ +\infty)$. Поэтому нули -2, 1, 5 функции f разбивают $D(f)$ на такие промежутки знакопостоянства: $(-\infty;\ -2)$, $\left(-2;\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right)$, $(1;\ 4)$, $(4;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$.

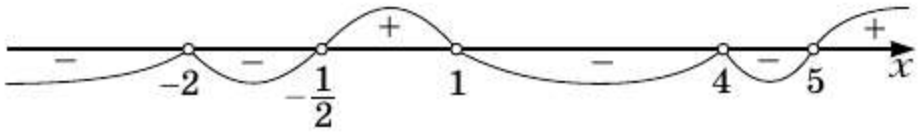


Рис. **9.9**

Результат исследования знака функции f на каждом из этих промежутков показан на рисунке 9.9.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$. ■

Пример 4. Решите неравенство $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

Решение. Имеем: $\frac{2 + x + 10 - 5x - 4 + x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$; $\frac{x^2 - 4x + 8}{(2-x)(2+x)} < 0$.

Областью определения функции $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{(2-x)(2+x)}$ является множество $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Функция f нулей не имеет. Поскольку функция f непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$ и не имеет на них нулей, то эти промежутки являются промежутками знакопостоянства.

На рисунке 9.10 показан результат исследования знака функции f на каждом из этих промежутков.

Это неравенство можно решить иначе. Поскольку дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 4x + 8$ отрицателен, а старший коэффициент положителен, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $x^2 - 4x + 8 > 0$. Числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства $\frac{x^2 - 4x + 8}{(2-x)(2+x)} < 0$, должны принимать значения разных знаков, поэтому это неравенство равносильно такому: $(2 - x)(2 + x) < 0$. Далее следует обратиться к рисунку 9.10.

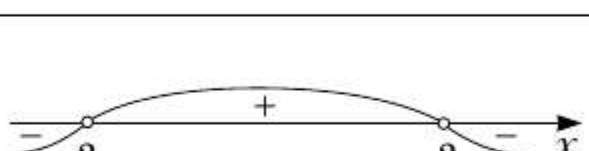


Рис. **9.10**

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. ■

С помощью метода интервалов можно решать и нестрогое неравенство $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \leqslant 0$). Множество решений такого неравенства — это объединение множества решений неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) и множества корней уравнения $f(x) = 0$.

Пример 5. Решите неравенство $\frac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x - 3} \geqslant 0$.

Решение.

Имеем: $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$.

Устанавливаем (рис. 9.11), что множество $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ является множеством решений неравенства $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0$.

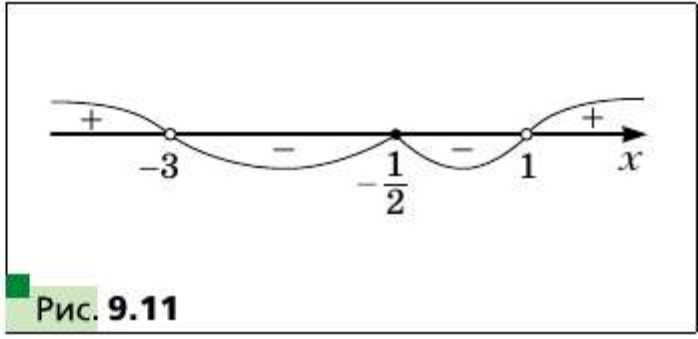


Рис. **9.11**

Уравнение $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ имеет единственный корень $x = -\dfrac{1}{2}$.

Объединив множества решений уравнения и неравенства, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \cup (1; +\infty)$. ■

Пример 6. Решите неравенство $(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

Решение. Имеем: $(x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)} \geqslant 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)}$. Решив неравенство $(x-1)(x-3) \geqslant 0$ (рис. 9.12), устанавливаем, что $D(f) = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

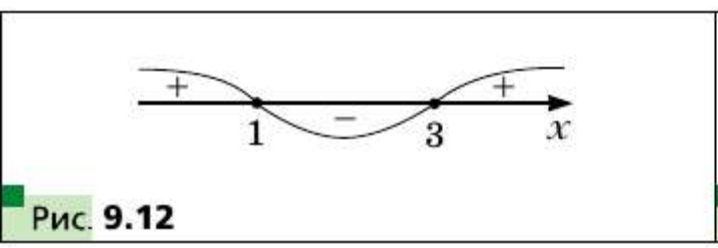


Рис. **9.12**

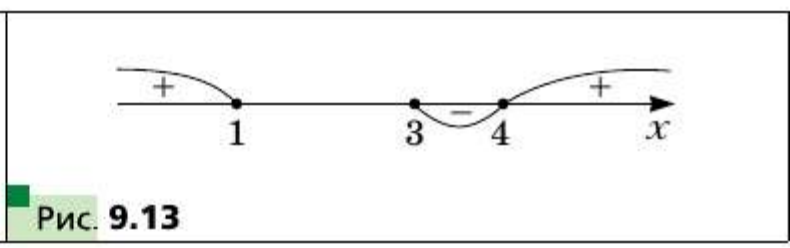


Рис. **9.13**

Множество корней уравнения $f(x) = 0$ имеет вид $\{1, 3, 4\}$.

Решим неравенство $f(x) > 0$. Нули функции f разбивают её область определения на такие промежутки знакопостоянства: $(-\infty; 1)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$.

Устанавливаем (рис. 9.13), что множество $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ является множеством решений неравенства $f(x) > 0$. Объединив множества решений уравнения $f(x) = 0$ и неравенства $f(x) > 0$, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{3\} \cup [4; +\infty)$. ■

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{3-x}{x^2-5x+6} \geqslant 2. \end{cases}$

Преобразовав второе неравенство системы, получаем: $\begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6} \leqslant 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{2(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0. \end{cases}$

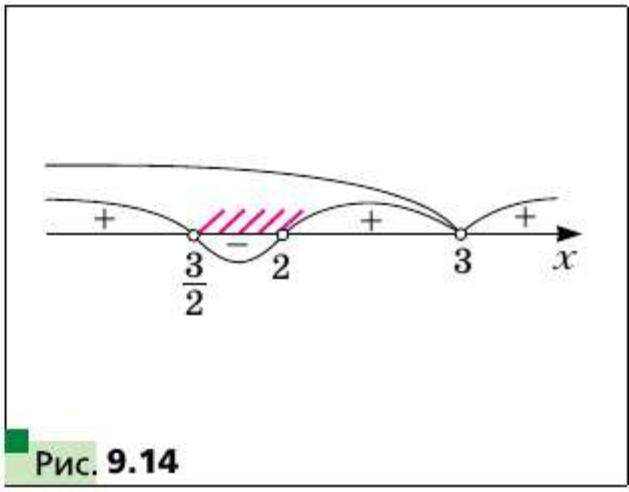


Рис. 9.14

Схема решения полученной системы изображена на рисунке 9.14. Решением этой системы является промежуток $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$.

2) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{2(x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0. \end{cases}$

Эта система решений не имеет (убедитесь в этом самостоятельно).

Ответ: $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$. ■

1. Каким свойством обладает функция, непрерывная на промежутке и не имеющая на нём нулей?

2. Укажите множество, на котором непрерывна функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены.

Упражнения

9.1. Решите неравенство:

1) $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$;
2) $x(x-3)(x+2) < 0$;
3) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
4) $(x-3)(2x+1)(1-5x)(x+4) > 0$.

9.2. Решите неравенство:

1) $(x+3)(x-1)(x+4) < 0$;
2) $(3x+2)(x-5)(4x-1) > 0$;
3) $(1-3x)(x+2)(3-x) < 0$;
4) $x(5x+3)(2-x)(4x-3)(x+5) > 0$.

9.3. Решите неравенство:

1) $(x-1)(x+3)^2(x-2) < 0$;
2) $|x-4|(x+1)(x-3) > 0$;
3) $(2x+3)(1-4x)^4(x-2)^3(x+6) < 0$;
4) $(1-3x)^3(x+2)^2(x-4)^5(x-3) > 0$.

9.4. Решите неравенство:

1) $x^2(x+1)(x-4) > 0$;

2) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2 > 0$.

9.5. Решите неравенство:

1) $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1) > 0$;

2) $(2x+1)^2(x^2-4x+3) > 0$;

3) $(3x^2-5x-2)(2x^2+x+1) < 0$;

4) $3x^3+2x^2-x < 0$;

5) $x^3-2x^2-x+2 > 0$;

6) $(2x^2+5x-3)(2x^2-5x+2) > 0$.

9.6. Решите неравенство:

1) $(4-x)(3x+1)(x^4+x^2+1) < 0$;

2) $|x-3|(3x+2)^3(3x^2-5x+6) > 0$;

3) $x^3-6x+5 > 0$;

4) $(x^2-4)(3x^2+7x+2) > 0$.

9.7. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x+3}{x-1} > 0$;

2) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$;

3) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)(x-5)} < 0$;

4) $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0$;

5) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} < 0$;

6) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} > 0$;

7) $\dfrac{(x-4)(x-3)(3x-7-x^2)}{x^2+x-2} > 0$;

8) $\dfrac{x^6+3x^4-x^2-3}{x^3-64x} < 0$.

9.8. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x}{x+2} < 0$;

2) $\dfrac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0$;

3) $\dfrac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0$;

4) $\dfrac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2} > 0$;

5) $\dfrac{(x-2)(x^2-1)(4x-5-3x^2)}{x+7} < 0$;

6) $\dfrac{(x^3-8)(x^2-6x-7)}{(3x-2x^2-4)(3x^2-10x+3)} < 0$;

7) $\dfrac{x^2+5x-6}{(x+2)(1-3x)} < 0$;

8) $\dfrac{(x^4-3x^2)(x^4+x^3-8x-8)}{(1-x)(x+2)} < 0$.

9.9. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x} < 1$;

2) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-3}$;

3) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2$;

4) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} < \dfrac{1}{x-3}$;

5) $\dfrac{7}{x^2-5x+6} + \dfrac{9}{x-3} < -1$;

6) $\dfrac{2}{3x+7} < \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+1}$.

9.10. Решите неравенство:

1) $\frac{5x+8}{4-x} < 2$;

2) $\frac{2}{x+3} > \frac{1}{x-1}$;

3) $\frac{2x+3}{x^2+x-12} < \frac{1}{2}$;

4) $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} > 0$;

5) $\frac{2x}{x^2-9} < \frac{1}{x+2}$;

6) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x}$.

9.11. Решите неравенство:

1) $(3x+1)(3-x)(x+5) \leqslant 0$;

2) $(2x+1)^2(x-1)(x-2) \geqslant 0$;

3) $\frac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2} \geqslant 0$;

4) $\frac{x^5\,|3x-1|\,(x+3)}{x-2} \leqslant 0$;

5) $\frac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5} \geqslant 0$;

6) $\frac{5x+4}{x+3} - \frac{x+2}{1-x} \leqslant 0$.

9.12. Решите неравенство:

1) $(x-3)(x+2)^2(x-5) \geqslant 0$;

2) $\frac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2} \leqslant 0$;

3) $\frac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|} \geqslant 0$;

4) $\frac{20}{x^2-7x+12} + \frac{10}{x-4} + 1 \geqslant 0$.

◆◆

9.13. Решите неравенство:

1) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9) \geqslant 0$;

2) $\frac{4x^2-4x+1}{x^2+x-12} \geqslant 0$;

3) $\frac{x^3-3x+2}{6-x} \leqslant 0$;

4) $\frac{|x|\,(x+1)^3}{|x-4|^3\,(x+3)} \leqslant 0$.

9.14. Решите неравенство:

1) $(x^2-4)(x^2+x-2) \leqslant 0$;

2) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10) \leqslant 0$;

3) $\frac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)} \leqslant 0$;

4) $\frac{|x-5|^5\,|x-2|}{(1-x)^3(x+4)} \leqslant 0$.

9.15. Решите неравенство $\left|\frac{x+2}{x}\right|(x^2-4x-5) \leqslant 0$.

9.16. Решите неравенство $\left|\frac{x-5}{x}\right|(x^2-x-12) \leqslant 0$.

9.17. Решите неравенство:

1) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} > 0$;
2) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} \geqslant 0$;
3) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} < 0$;
4) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} \leqslant 0$;
5) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} < 0$;
6) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} > 0$;
7) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \leqslant 0$;
8) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \geqslant 0$;
9) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} < 0$;
10) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} > 0$;
11) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \leqslant 0$;
12) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \geqslant 0$.

9.18. Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} > 0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \geqslant 0$;
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} < 0$;
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \leqslant 0$;
5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} < 0$;
6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} > 0$;
7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \leqslant 0$;
8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$;
9) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} > 0$;
10) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} < 0$;
11) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant 0$;
12) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} \geqslant 0$.

9.19. Решите неравенство $\left|\frac{x}{x^2-9}\right| \leqslant \frac{x}{x^2-9}$.

9.20. Решите неравенство $\left|\frac{x-1}{x^2-16}\right| \leqslant \frac{x-1}{x^2-16}$.

9.21. Решите неравенство:

1) $(|x|-3)(|x|-8) \geqslant 0$;
2) $\frac{|x+2|-x}{x} < 2$;
3) $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$;
4) $\frac{|x-1|}{x+2} + x - 3 > \frac{1}{x+2}$.

9.22. Решите неравенство:

1) $(|x|-5)(|x|-7) \leqslant 0$;
2) $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$;
3) $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$;
4) $\frac{2}{x|x-1|} \leqslant -1$.

9.23. Решите неравенство:

1) $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| \geqslant 2$;
2) $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| \leqslant 1$;
3) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1$.

9.24. Решите неравенство:

1) $\left|\frac{x-3}{x-5}\right| \geqslant 1$;
2) $\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \leqslant 1$;
3) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| < 1$.

9.25. Решите уравнение:

1) $|2x-1|+|x^2-x-6|=x^2+x-7$;

2) $|x^2-4|+|x^2-x-2|=|2x^2-x-6|$.

9.26. Решите уравнение:

1) $|3x-2|+|x^2-5x+6|=x^2-2x+4$;

2) $|x^2-9|+|x^2+4x+3|=|2x^2+4x-6|$.

9.27. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:

1) $|x-a|(5x^2-2x-3)<0$; 2) $|x-a|(5x^2-2x-3)\leqslant 0$.

9.28. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:

1) $|x-a|(7x^2-4x-3)<0$; 2) $|x-a|(7x^2-4x-3)\leqslant 0$.

9.29. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:

1) $|x-1|(x^2-(a+3)x+3a)<0$; 2) $|x-1|(x^2-(a+3)x+3a)\leqslant 0$.

9.30. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:

1) $|x+2|(x^2-(a+1)x+a)<0$; 2) $|x+2|(x^2-(a+1)x+a)\leqslant 0$.

9.31. Решите уравнение $2\{x\}-\{x\}[x]=x-5$.

9.32. Решите уравнение $[x]\{x\}-3\{x\}=6-x$.

Упражнения для повторения

9.33. Решите уравнение $||x-1|-1|=2$.

9.34. Упростите выражение $\sqrt{2a-4+2\sqrt{a^2-4a+3}}-\sqrt{a-1}$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Парабола

Фигуру, которая является графиком уравнения $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называют параболой.

На рисунке 9.15 изображена парабола $y=x^2$. Если её расположить, например, так, как показано на рисунке 10.16, то уравнение этой фигуры не будет иметь вид $y=ax^2+bx+c$. Можно ли фигуру, изображённую на рисунке 9.16, называть параболой?

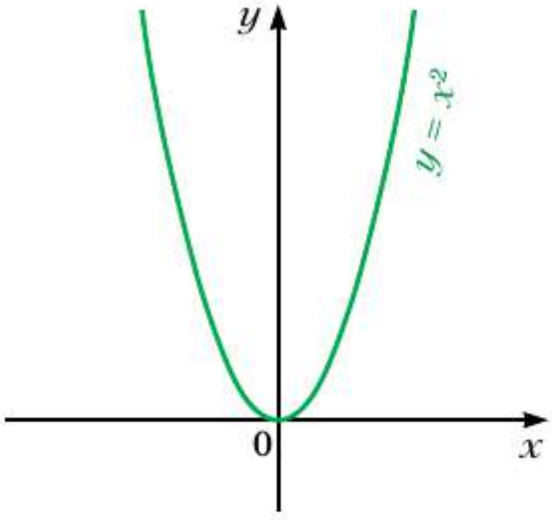


Рис. 9.15

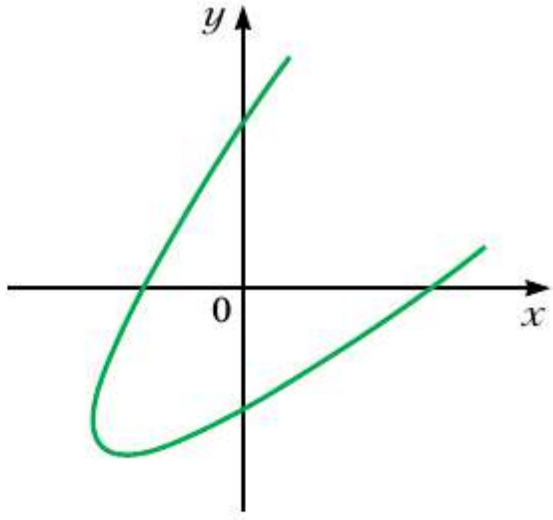


Рис. 9.16

Естественно, когда равные фигуры имеют одинаковые названия. Поэтому хотелось бы дать такое определение параболы, которое не было бы связано с уравнением фигуры. Например, определение окружности было дано как ГМТ, равноудалённых от данной точки, и лишь затем получено её уравнение.

Рассмотрим такую задачу. Пусть даны прямая d и точка F, не принадлежащая этой прямой. Найдём ГМТ, равноудалённых от прямой d и точки F.

Опустим из точки F перпендикуляр FK на прямую d. Пусть точка O — середина отрезка FK (рис. 9.17).

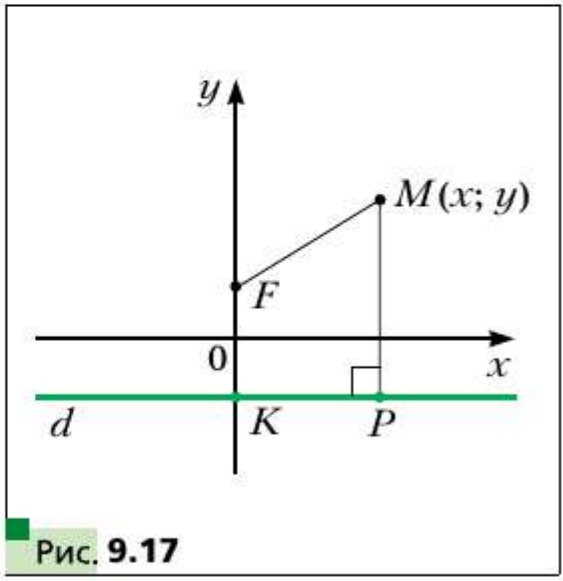


Рис. 9.17

Выберем систему координат так, чтобы ось ординат совпадала с прямой FK, а ось абсцисс — с серединным перпендикуляром отрезка FK.

Выберем единичный отрезок так, чтобы $FK = \frac{1}{2}$. Тогда $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $K\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, уравнение прямой d имеет вид $y = -\frac{1}{4}$.

Пусть $M(x; y)$ — точка, принадлежащая искомому ГМТ. Тогда расстояние от точки M до прямой d (длина отрезка MP) равно $\left|y + \frac{1}{4}\right|$, а длина отрезка MF равна $\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}$.

С учётом условия можно записать: $MP = MF$, т. е.

$$\left|y + \frac{1}{4}\right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}. \qquad (1)$$

Заметим, что если точка принадлежит искомому ГМТ, то её координаты удовлетворяют уравнению (1). И наоборот, пара чисел, являющаяся решением уравнения (1), — это координаты точки, принадлежащей искомому ГМТ.

Запишем $\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$;

$$y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16};$$

$$y = x^2.$$

Следовательно, искомое ГМТ — это фигура, являющаяся графиком уравнения $y = x^2$, т. е. парабола (рис. 9.18).

Можно показать (сделайте это самостоятельно), что если точки F и K выбрать так, что $FK = \frac{1}{2a}$, где $a > 0$, то в результате аналогичных рассуждений будет получено уравнение $y = ax^2$.

Этот результат подсказывает, что можно принять такое определение параболы.

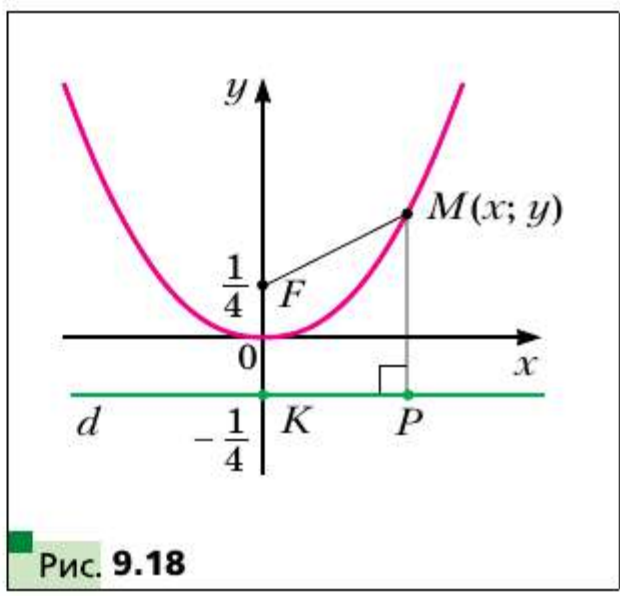


Рис. 9.18

Определение

Параболой называют ГМТ, равноудалённых от данной прямой и данной точки, не лежащей на этой прямой.

Данную прямую называют **директрисой** (от лат. *directrixe* — «направляющая»), а данную точку — **фокусом** (от лат. *focus* — «очаг», «огонь»).

Прямую, проходящую через фокус и перпендикулярную директрисе, называют **осью параболы**.

Парабола обладает целым рядом интересных свойств.

Если параболу вращать вокруг её оси, то получим поверхность, которую называют параболоидом вращения (рис. 9.19). Такую форму имеют зеркала прожекторов, автомобильных фар, телескопов. Лучи света от источника, расположенного в фокусе параболы, отражаясь от поверхности параболоида вращения, образуют направленный пучок света. И на-

оборот, все световые лучи, идущие параллельно оси вращения, после отражения собираются в одной точке — фокусе. Это свойство лежит в основе принципа работы параболических антенн.

С кривыми, имеющими форму параболы, можно встретиться, изучая движение предметов. Например, траектории полётов камня, брошенного под углом к горизонту, артиллерийского снаряда при отсутствии сопротивления воздуха являются параболами. Струи воды в фонтане образуют фигуру, похожую на параболу.

Парабола делит плоскость на две фигуры. Одна из них является выпуклой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками содержит отрезок с концами в этих точках. Её называют **внутренней областью параболы**. На рисунке 9.20 внутренняя область параболы закрашена жёлтым цветом.

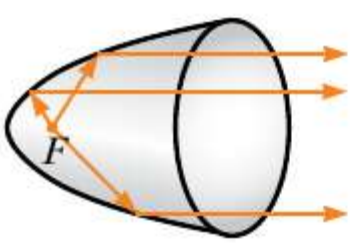


Рис. **9.19**

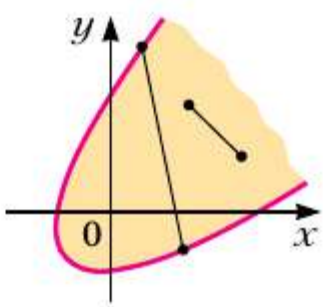


Рис. **9.20**

Расстояние от любой точки внутренней области параболы до фокуса меньше, чем расстояние от этой точки до директрисы. Расстояние от любой точки, не принадлежащей внутренней области параболы, до директрисы не больше, чем расстояние от этой точки до фокуса. Эти два свойства докажите самостоятельно.

Знание свойств параболы позволяет решать целый ряд интересных задач. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 1. Докажите, что конечным множеством внутренних областей парабол невозможно покрыть плоскость.

Решение. Проведём прямую, не параллельную ни одной из осей парабол (такая прямая существует, так как парабол конечное количество). Каждая из внутренних областей парабол или не имеет общих точек с проведённой прямой, или множество общих точек образует отрезок. Но конечным количеством отрезков невозможно покрыть прямую. ■

Пример 2. На плоскости задано конечное множество прямых и конечное множество точек, ни одна из которых не принадлежит данным прямым. Докажите, что на плоскости существует точка, расстояние от которой до любой из данных прямых меньше, чем расстояние до любой из заданных точек.

Решение. Каждую пару (прямая; точка) будем рассматривать как директрису и фокус некоторой параболы. Таким образом, задано конечное множество внутренних областей парабол. Согласно результату предыдущей задачи они не покрывают всю плоскость. Возьмём любую непокрытую точку, не принадлежащую ни одной из парабол. Поскольку расстояние от точки, не принадлежащей параболе и её внутренней области, до директрисы меньше, чем расстояние от этой точки до фокуса, то указанная точка является искомой. ■

Итоги главы 1

Функция

Пусть X — множество значений независимой переменной, Y — множество значений зависимой переменной. Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Функцию считают заданной, если указана её область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Область определения функции

Множество всех значений, которые принимает аргумент, называют областью определения функции и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Область значений функции

Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, называют областью значений функции и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Взаимно однозначное отображение

Если в отображении f множества X на множество Y каждый элемент множества Y является соответствующим некоторому единственному элементу множества X, такое отображение называют взаимно однозначным отображением множества X на множество Y.

График числовой функции

Графиком числовой функции называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Нуль функции

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулём функции.

Промежуток знакопостоянства функции

Промежуток, на котором функция принимает значения одинакового знака, называют промежутком знакопостоянства функции.

Возрастающие и убывающие функции

- Функцию f называют возрастающей на множестве $M \subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.
- Функцию f называют убывающей на множестве $M \subset D(f)$, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции

- Число $f(x_0)$ называют наибольшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.
- Число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Чётная и нечётная функции

- Функцию f называют чётной, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.
- Функцию f называют нечётной, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

Свойства графиков чётной и нечётной функций

- Если точка $M(a; b)$ принадлежит графику чётной функции f, то точка $M_1(-a; b)$ также принадлежит её графику, т. е. график чётной функции симметричен относительно оси ординат.
- Если точка $M(a; b)$ принадлежит графику нечётной функции f, то точка $M_1(-a; -b)$ также принадлежит её графику, т. е. график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Квадратичная функция

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — параметры, причём $a \neq 0$, называют квадратичной.

глава

2 Уравнения с двумя переменными и их системы

- В этой главе вы расширите свои знания об уравнениях с двумя переменными.
- Вы научитесь строить графики уравнений с двумя переменными с помощью преобразований графиков.
- Вы расширите свои знания о системах уравнений с двумя переменными, методах их решения, приобретёте новые навыки решения систем уравнений.

§ 10 Уравнение с двумя переменными и его график

Выражения $x^2 + y^2$, $\frac{x+y}{x-y}$, $(x-1)(y+2)$, $x - 3y$ являются примерами выражений с двумя переменными x и y.

Выражение с переменными x и y обозначают так: $F(x; y)$ (читают: «эф от икс и игрек»).

При таком обозначении равенство $F(x; y) = 0$ является уравнением с двумя переменными x и y.

Например, если $F(x; y) = ax + by + c$, то равенство $F(x; y) = 0$ является линейным уравнением с двумя переменными.

Напомним, что если $F(x; y)$ — многочлен стандартного вида, то его степенью называют наибольшую из степеней одночленов, входящих в него. В этом случае *степенью соответствующего уравнения* $F(x; y) = 0$ *называют степень многочлена* $F(x; y)$.

Например, степень уравнения $x^2 - x^2y^3 + y^3 = 0$ равна 5.

Если в линейном уравнении $ax + by + c = 0$ параметры a и b одновременно не равны нулю ($a^2 + b^2 \neq 0$), то это уравнение является **уравнением первой степени с переменными x и y**.

Уравнение второй степени с переменными x и y имеет вид: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, где a, b, c, d, e, f — параметры, причём $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Напомним, что пару чисел $(x_0; y_0)$ называют **решением уравнения** $F(x; y) = 0$, если $F(x_0; y_0) = 0$ — верное числовое равенство.

Если на координатной плоскости xy отметить все точки, координаты которых являются решением уравнения $F(x; y) = 0$, то полученную фигуру называют **графиком** этого уравнения.

Например, графиком уравнения первой степени с двумя переменными является прямая, графиком уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $R > 0$, является окружность радиуса $\boldsymbol{R}$ с центром в точке $M\,(a;\, b)$[1], графиком уравнения $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола.

Пример 1. Постройте график уравнения $x = y^2$.

Решение. Если в данном уравнении заменить x на y, а y на x, то получим уравнение $y = x^2$, графиком которого является парабола. Это значит, что искомый график — это график уравнения $y = x^2$, построенный на координатной плоскости yx, т. е. в системе координат, в которой оси абсцисс и ординат поменялись местами.

Таким образом, графиком уравнения $x = y^2$ является парабола, изображённая на рисунке 10.1. ■

Пример 2. Постройте график уравнения $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} y^2 = 1 - x^2, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 1$ является окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Следовательно, искомым графиком является полуокружность, лежащая в верхней полуплоскости относительно оси абсцисс (рис. 10.2). ■

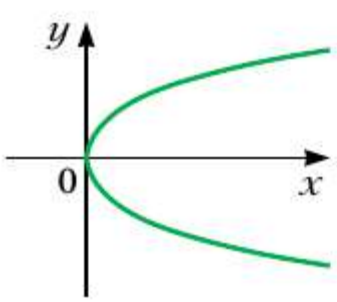


Рис. **10.1**

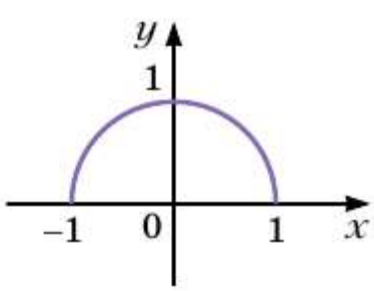


Рис. **10.2**

В § 4–6 вы научились преобразовывать графики функций, тем самым существенно расширили класс функций, графики которых вы можете строить.

Аналогичные преобразования можно выполнять с графиками уравнений.

[1] Этот факт будет доказан в курсе геометрии 9 класса.

Ниже приведём восемь утверждений (правил), показывающих, как, используя график уравнения $F(x; y) = 0$, можно построить графики уравнений $F(x + a; y) = 0$; $F(x; y + b) = 0$; $F(-x; y) = 0$; $F(x; -y) = 0$; $F(kx; y) = 0$, где $k > 0$; $F(x; ky) = 0$, где $k > 0$; $F(|x|; y) = 0$; $F(x; |y|) = 0$. Первое из утверждений мы докажем. Доказательство остальных утверждений проведите самостоятельно.

Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику уравнения $F(x; y) = 0$, т. е. выполняется равенство $F(x_0; y_0) = 0$. Тогда точка $(x_0 - a; y_0)$ принадлежит графику уравнения $F(x + a; y) = 0$. Действительно, $F((x_0 - a) + a; y_0) = F(x_0; y_0) = 0$. Следовательно, каждой точке графика уравнения $F(x; y) = 0$ соответствует единственная точка графика уравнения $F(x + a; y) = 0$. Аналогично можно показать, что каждая точка графика уравнения $F(x + a; y) = 0$ является соответствующей единственной точке графика уравнения $F(x; y) = 0$. Таким образом, между множествами точек указанных графиков уравнений установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому все точки графика уравнения $F(x + a; y) = 0$ можно получить, заменив каждую точку графика уравнения $F(x; y) = 0$ на точку с той же ординатой и абсциссой, из которой вычли число a. Приведённые рассуждения показывают, что справедливо следующее утверждение.

График уравнения $F(x + a; y) = 0$ можно получить в результате параллельного переноса графика уравнения $F(x; y) = 0$ вдоль оси абсцисс на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

Например, график уравнения $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ можно получить, если перенести окружность $x^2 + y^2 = 4$ вдоль оси абсцисс на две единицы влево (рис. 10.3).

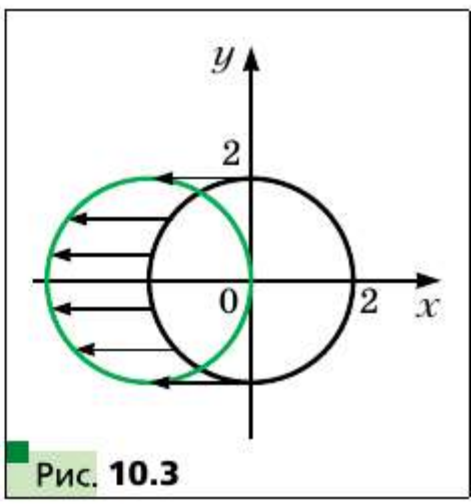


Рис. **10.3**

График уравнения $F(x; y + b) = 0$ можно получить в результате параллельного переноса графика уравнения $F(x; y) = 0$ вдоль оси ординат на b единиц вниз, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вверх, если $b < 0$.

Например, график уравнения $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ можно получить, если перенести окружность $x^2 + y^2 = 4$ вдоль оси ординат на две единицы вниз (рис. 10.4).

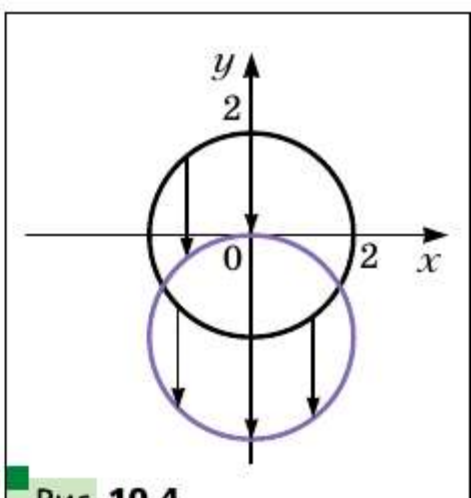


Рис. **10.4**

График уравнения $F(-x; y) = 0$ можно получить в результате преобразования симметрии относительно оси ординат графика уравнения $F(x; y) = 0$.

Например, график уравнения $(-x + 2)^2 + y^2 = 4$ можно получить, симметрично отобразив окружность $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ относительно оси ординат (рис. 10.5).

График уравнения $F(x; -y) = 0$ можно получить в результате преобразования симметрии относительно оси абсцисс графика уравнения $F(x; y) = 0$.

Например, график уравнения $x^2 + (-y + 2)^2 = 4$ можно получить, симметрично отобразив окружность $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ относительно оси абсцисс (рис. 10.6).

График уравнения $F(kx; y) = 0$, где $k > 0$, можно получить в результате сжатия графика уравнения $F(x; y) = 0$ в k раз к оси ординат, если $k > 1$, или в результате растяжения графика уравнения $F(x; y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат, если $0 < k < 1$.

Например, график уравнения $(2x)^2 + y^2 = 4$ можно получить, если сжать в 2 раза окружность $x^2 + y^2 = 4$ к оси ординат (рис. 10.7). Полученную фигуру называют **эллипсом**.

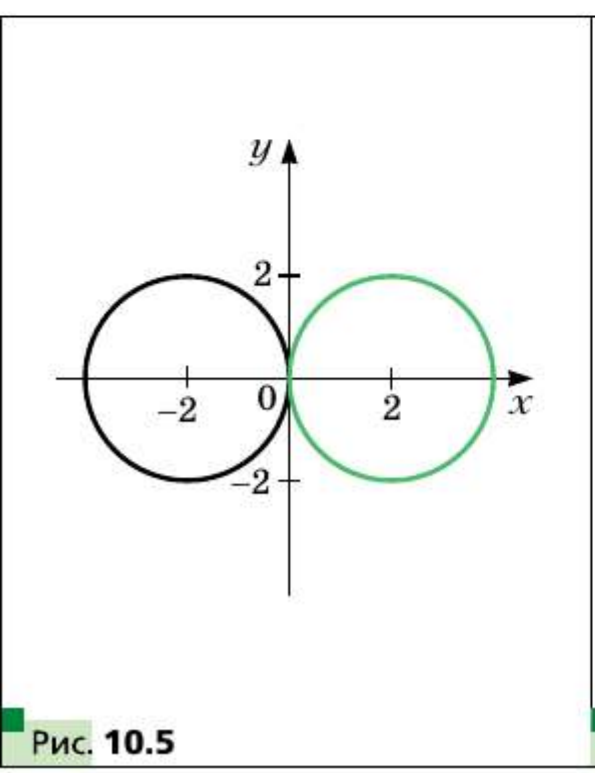


Рис. **10.5**

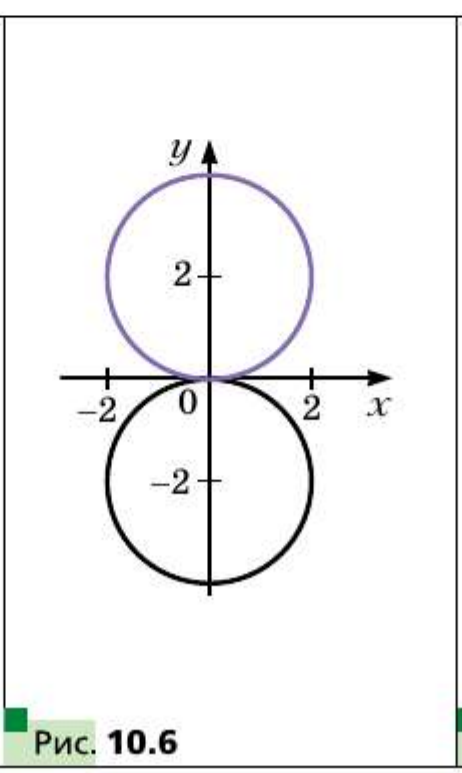


Рис. **10.6**

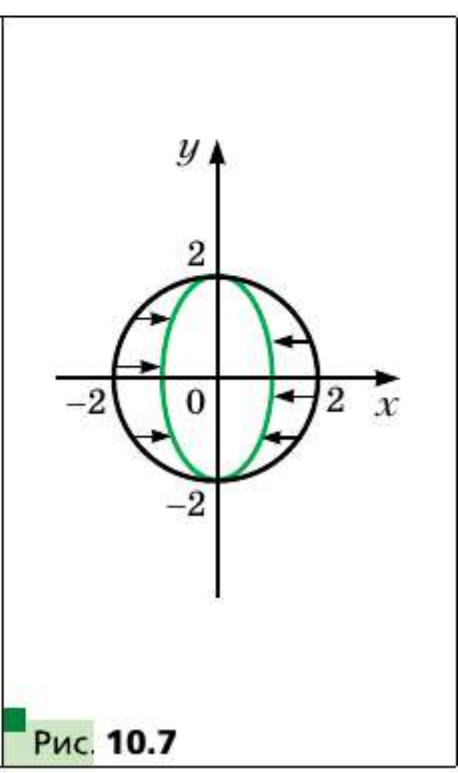


Рис. **10.7**

График уравнения $F(x; ky) = 0$, где $k > 0$, можно получить в результате сжатия графика уравнения $F(x; y) = 0$ в k раз к оси абсцисс, если $k > 1$, или в результате растяжения графика уравнения $F(x; y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раз от оси абсцисс, если $0 < k < 1$.

Например, график уравнения $x^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 4$ можно получить, если растянуть в 2 раза окружность $x^2 + y^2 = 4$ от оси абсцисс (рис. 10.8). Полученная фигура также является эллипсом.

График уравнения $F(|x|; y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ таким образом: построить фигуру M_1, являющуюся графиком уравнения $F(x; y) = 0$ при $x \geqslant 0$, и построить фигуру M_2, симметричную фигуре M_1 относительно оси ординат. Фигура $M_1 \cup M_2$ является искомым графиком.

На рисунке 10.9 зелёным цветом изображён график уравнения $(|x| - 1)^2 + y^2 = 4$.

График уравнения $F(x; |y|) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ таким образом: построить фигуру M_1, являющуюся графиком уравнения $F(x; y) = 0$ при $y \geqslant 0$, и построить фигуру M_2, симметричную фигуре M_1 относительно оси абсцисс. Фигура $M_1 \cup M_2$ является искомым графиком.

На рисунке 10.10 оранжевым цветом изображён график уравнения $x^2 + (|y| + 1)^2 = 4$.

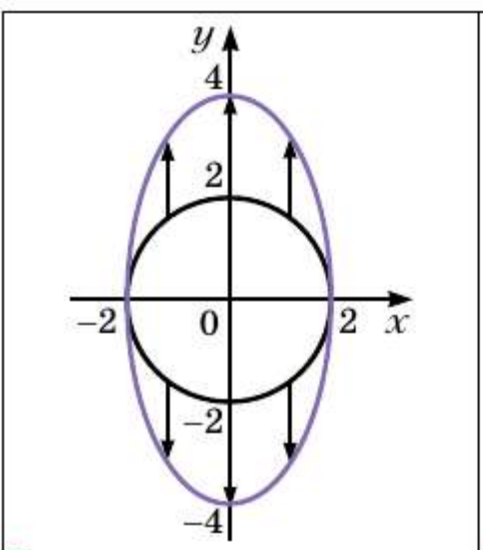


Рис. **10.8**

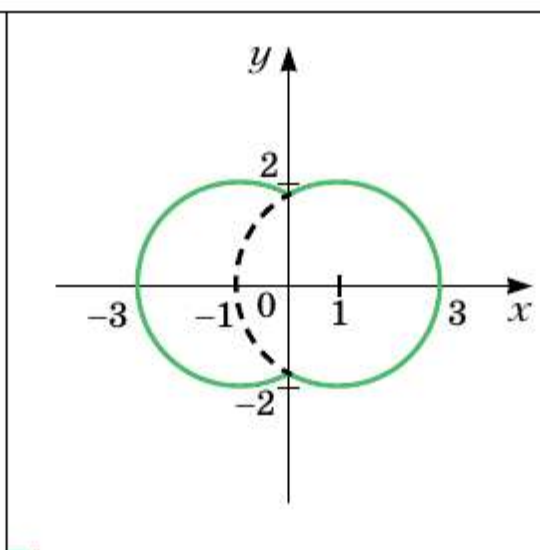


Рис. **10.9**

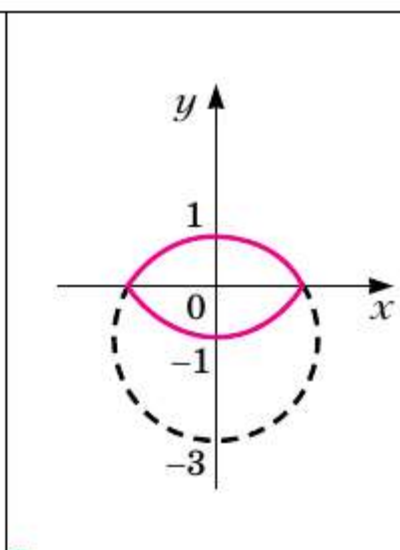


Рис. **10.10**

Пример 3. Постройте график уравнения $|x| + |y| = 1$.

Решение. Пусть $F(x; y) = x + y = 1$. Тогда искомый график можно построить по такой схеме (рис. 10.11):

$$F(x; y) = 0 \longrightarrow F(|x|; y) = 0 \longrightarrow F(|x|; |y|) = 0. \blacksquare$$

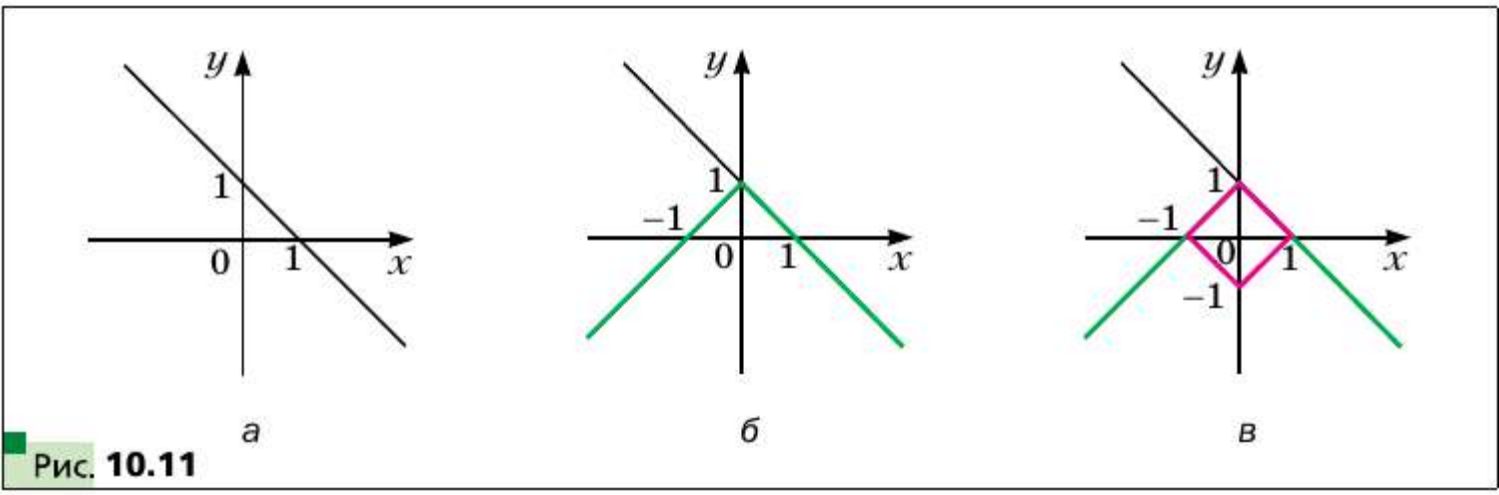


Рис. **10.11**

Пример 4. При каких значениях параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

Решение. Преобразуем данное уравнение: $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$.

Его графиком в системе координат xa является окружность (рис. 10.12).

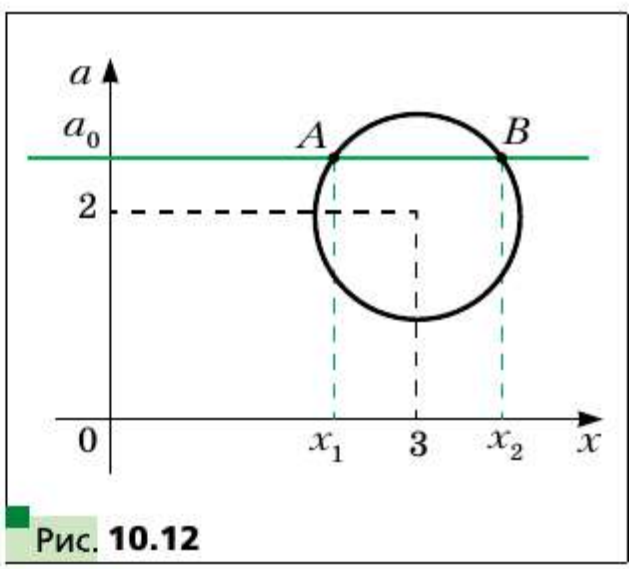


Рис. **10.12**

Если прямая $a = a_0$ пересекает окружность в точках A и B, то модуль разности корней уравнения равен длине отрезка AB (см. рис. 10.12). Следовательно, надо найти такое положение прямой $a = a_0$, при котором хорда AB имеет наибольшую длину. Это условие выполняется тогда, когда хорда AB является диаметром окружности. Отсюда $a = 2$. $\blacksquare$

? Как, используя график уравнения $F(x; y) = 0$, построить графики уравнений: $F(x + a; y) = 0$; $F(x; y + b) = 0$; $F(-x; y) = 0$; $F(x; -y) = 0$; $F(kx; y) = 0$, где $k > 0$; $F(x; ky) = 0$, где $k > 0$; $F(|x|; y) = 0$; $F(x; |y|) = 0$?

Упражнения

10.1. Решите уравнение:

1) $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 20 = 0$;

2) $5x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$;

3) $\sqrt{y - 1} = \sqrt{-x^2(x - 1)^2}$;

4) $y^2 = \sqrt{1 - x^2} - 1$.

10.2. Решите уравнение:

1) $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$;

2) $x^2 + 2xy + 10y^2 - 12y + 4 = 0$;

3) $\sqrt{x-1} = \sqrt{-y^2(y+1)^2}$;

4) $x^2 + \sqrt{y^2+1} = 1$.

10.3. Постройте график уравнения:

1) $x^2 = y^2$;

2) $x^2 = 4$;

3) $(x + 2)(y - 3) = 0$;

4) $y^2 + 6xy = 0$;

5) $xy - 3x + y = 3$;

6) $y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$.

10.4. Постройте график уравнения:

1) $x^2 = 4y^2$;

2) $y^2 = 1$;

3) $xy - 4x + 2y = 8$;

4) $x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$.

10.5. Постройте график уравнения:

1) $|y| = x$;

2) $|y - 1| = x - 2$;

3) $|x + 2y| = 1$;

4) $|x + 3| = |y - 2|$;

5) $xy = |x|$;

6) $(x + 2)\, y = |y|$;

7) $|x|y = 1$;

8) $x|y| = 1$;

9) $|xy| = 1$.

10.6. Постройте график уравнения:

1) $|y - 1| = x$;

2) $|y + 1| = x + 3$;

3) $|x - 3y| = 2$;

4) $(x - 4)^2 = (y + 1)^2$;

5) $xy = |y|$;

6) $|x|y = -6$.

10.7. На координатной плоскости xy постройте график уравнения:

1) $x = \sqrt{y}$;

2) $x = \sqrt{y-1}$;

3) $x = \sqrt{-y}$;

4) $x = \sqrt{|y|}$;

5) $x = \sqrt{|y|+1}$;

6) $|x| = \sqrt{|y|}$;

7) $|x-1| = \sqrt{|y+1|}$;

8) $|x| - 1 = \sqrt{|y+1|}$;

9) $|x| - 1 = \sqrt{|y|+1}$.

10.8. Постройте график уравнения:

1) $|y| = \sqrt{x}$;

2) $|y+1| = \sqrt{x}$;

3) $|y| = \sqrt{x+1}$;

4) $|y+1| = \sqrt{|x|+1}$;

5) $|y| = \sqrt{|x+1|}$;

6) $|y| + 1 = \sqrt{|x|+1}$.

10.9. Постройте график уравнения:

1) $x = (y - 1)^2$;

2) $|x| = (y - 1)^2$;

3) $x + 2 = (y - 1)^2$;

4) $|x + 2| = (|y| - 1)^2$;

5) $|x| + 2 = (|y| - 1)^2$.

10.10. Постройте график уравнения:

1) $|y| = x^2$;

2) $|y| = 1 - x^2$;

3) $|y - 1| = x^2$;

4) $|y - 1| = (x - 1)^2$;

5) $|y| = (|x| - 1)^2$;

6) $|y - 1| = (|x| - 1)^2$.

10.11. Постройте график уравнения:

1) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$;

2) $(3x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$;

3) $(|x| - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$;

4) $(|x| - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 9$.

10.12. Постройте график уравнения:

1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

2) $(x - 1)^2 + (4y - 2)^2 = 16$;

3) $(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

4) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$.

10.13. Постройте график уравнения:

1) $|x| + |y| = 2$;
2) $|x - 1| + |y| = 2$;
3) $|x - 1| + |y + 2| = 2$;
4) $|2x - 1| + |y + 2| = 2$.

10.14. Постройте график уравнения:

1) $|x| - |y| = 2$;
2) $|x + 1| - |y| = 2$;
3) $|x + 1| - |y - 1| = 2$;
4) $|x + 1| - |2y - 1| = 2$.

10.15. Постройте график уравнения:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$;
2) $y - 1 = \sqrt{4 - x^2}$;
3) $|y - 1| = \sqrt{4 - x^2}$;
4) $|y| - 1 = \sqrt{4 - x^2}$;
5) $y = \sqrt{2x - x^2}$;
6) $y = \sqrt{2|x| - x^2}$.

10.16. Постройте график уравнения:

1) $x = \sqrt{1 - y^2}$;
2) $|x| = \sqrt{1 - y^2}$;
3) $|x + 2| = \sqrt{1 - y^2}$;
4) $|x| + 2 = \sqrt{1 - y^2}$;
5) $x = \sqrt{4y - y^2}$;
6) $x = \sqrt{4|y| - y^2}$.

10.17. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2}{y - x} = 0$;
2) $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{|x| - 1} = 0$;
3) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} = 0$;
4) $\dfrac{(y^2 - 1)(y - x)}{x^2 - 4} = 0$;
5) $\dfrac{x^2 - x}{y - x} = 1$;
6) $\dfrac{3x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2} = 1$;
7) $\dfrac{x^2 - y^2}{|x| - |y|} = 1$;
8) $\dfrac{x^2 + x}{y^2 + y} = 1$;
9) $\dfrac{3|x| + |y| - 2}{|x| - |y|} = 1$.

10.18. Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{|y| - 1} = 0$;
2) $\dfrac{|x| - |y|}{y - x^2} = 0$;
3) $\dfrac{|x| + |y| - 1}{1 - x^2 - y^2} = 0$;
4) $\dfrac{(y^2 - 4)(y + x)}{x^2 - 1} = 0$;
5) $\dfrac{y^2 + y}{x + y} = 1$;
6) $\dfrac{y^2 - y}{x^2 - x} = 1$.

◆ ◆ ◆

10.19. Определите количество корней уравнения $(x^2 + a^2 - 1)(a - x) = 0$ в зависимости от значения параметра a.

10.20. Определите количество корней уравнения $(4 - x^2 - a^2)(3a - x^2) = 0$ в зависимости от значения параметра a.

10.21. При каких значениях параметра a уравнение $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ имеет единственное решение?

10.22. При каких значениях параметра a уравнение $ax + \sqrt{-5 - x^2 - 6x} = 2$ имеет два корня?

10.23. Постройте график уравнения $(x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4x^2y^2$.

10.24. Постройте график уравнения $(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 4y + 6) = 2$.

10.25. Постройте график уравнения $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=2-x^2-y^2$.

10.26. Постройте график уравнения $\{x\}=\{y\}$.

10.27. Постройте график уравнения $\{x\}=-\{y\}$.

10.28. Найдите наименьшее значение выражения $|x|+|y|$, если $x^2+(y-4)^2=1$.

10.29. Найдите наименьшее значение выражения x^2+y^2, если $|x+3|+|y|=1$.

Упражнения для повторения

10.30. Упростите выражение $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}}$, если $x>2$.

10.31. Составьте квадратное уравнение, корни которого больше соответствующих корней уравнения $x^2+4x-9=0$ на единицу.

§ 11 Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными

В курсе алгебры 7 класса вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений. Напомним, что этот метод заключается в поиске координат общих точек графиков уравнений, входящих в систему.

За два учебных года вы приобрели значительный опыт построения графиков функций и уравнений, что расширило возможности применения графического метода для решения систем уравнений.

Пример 1. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-4x+y^2+2y=0, \\ y=2x^2-8x+7. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы равносильно такому: $(x-2)^2+(y+1)^2=5$. Его графиком является окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке $(2;\ -1)$, изображённая на рисунке 11.1.

Графиком второго уравнения является парабола с вершиной в точке $(2;\ -1)$, ветви

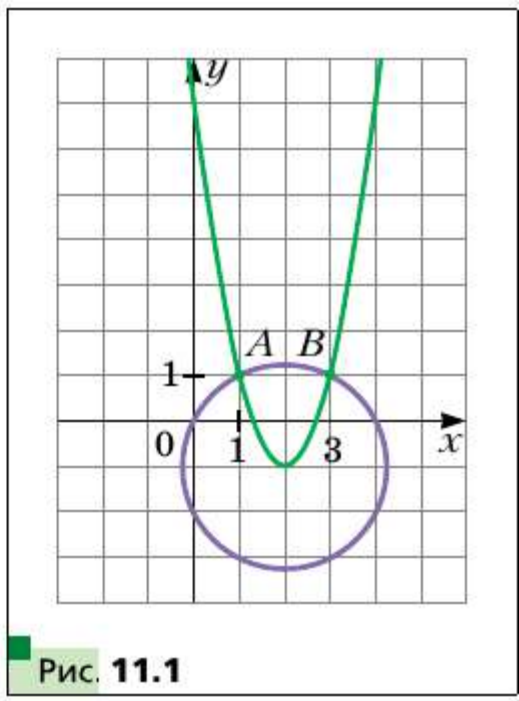


Рис. 11.1

которой направлены вверх. Окружность и парабола пересекаются в двух точках: $A\,(1;\,1)$ и $B\,(3;\,1)$ (см. рис. 11.1).

Как вы знаете, графический метод не гарантирует того, что полученный результат является точным. Поэтому найденные решения следует проверить. Проверка подтверждает, что пары чисел (1; 1) и (3; 1) являются решениями данной системы.

Ответ: (1; 1), (3; 1). ■

Заметим, что эта система является удобной для применения графического метода: координаты точек пересечения графиков оказались целыми числами. Понятно, что такая ситуация встречается далеко не всегда. Графический метод наиболее эффективен тогда, когда нужно определить количество решений системы уравнений или достаточно найти решения приближённо. Например, с помощью графической интерпретации легко выяснить, сколько решений имеет система линейных уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ в которой $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Количество решений этой системы зависит от взаимного расположения на плоскости двух прямых, являющихся графиками уравнений системы:

- если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;
- если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;
- если прямые параллельны, то система решений не имеет.

Пример 2. Определите количество решений системы уравнений $\begin{cases} (a+3)x + 4y = 5 - 3a, \\ 2x + (5+a)y = 8 \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a.

Решение. Графиком первого уравнения системы является невертикальная прямая $y = -\dfrac{a+3}{4}x + \dfrac{5-3a}{4}$.

Если $a = -5$, то графиком второго уравнения системы является вертикальная прямая $x = 4$. Вертикальная и невертикальная прямые всегда имеют только одну общую точку, поэтому в этом случае система имеет единственное решение.

Пусть $a \neq -5$. Запишем исходную систему так: $\begin{cases} y = -\dfrac{a+3}{4}x + \dfrac{5-3a}{4}, \\ y = -\dfrac{2}{5+a}x + \dfrac{8}{5+a}. \end{cases}$

Если $-\dfrac{a+3}{4} \neq -\dfrac{2}{5+a}$, то прямые, являющиеся графиками уравнений этой системы, имеют разные угловые коэффициенты, а следовательно, они пересекаются.

Если выполняется равенство $-\dfrac{a+3}{4} = -\dfrac{2}{5+a}$, то эти прямые или параллельны, или совпадают.

Прямые параллельны, если $\begin{cases} \dfrac{a+3}{4} = \dfrac{2}{5+a}, \\ \dfrac{5-3a}{4} \neq \dfrac{8}{5+a}. \end{cases}$ Отсюда $a = -7$.

Прямые совпадают, если $\begin{cases} \dfrac{a+3}{4} = \dfrac{2}{5+a}, \\ \dfrac{5-3a}{4} = \dfrac{8}{5+a}. \end{cases}$ Отсюда $a = -1$.

Ответ: если $a = -1$, то система имеет бесконечно много решений; если $a = -7$, то решений нет; если $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-7, -1\}$, то система имеет единственное решение. ■

Пример 3. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет ровно три решения?

Решение. Легко установить (сделайте это самостоятельно), что графиком первого уравнения системы является объединение двух лучей, имеющих общее начало $A(-5;\ 0)$. На рисунке 11.2 этот график выделен зелёным цветом. Графиком второго уравнения системы является окружность с центром в точке $(a;\ 0)$ и радиусом 2.

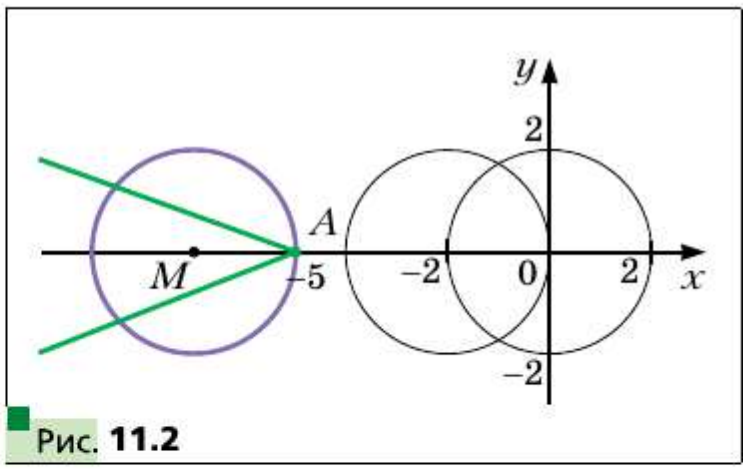


Рис. 11.2

Найдём такое положение окружности, при котором она имеет три общие точки с графиком первого уравнения системы. Из рисунка 11.2 видно, что такое условие выполняется, если окружность проходит через точку A и её центр, точка M, лежит левее этой точки. Поскольку радиус

окружности равен 2, то $MA = 2$. Поэтому центр окружности находится в точке $M(-7; 0)$. Отсюда $a = -7$.

Ответ: $a = -7$. ■

1. Опишите, в чём состоит графический метод решения систем уравнений.

2. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?

Упражнения

11.1. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ x + y = 2. \end{cases}$

11.2. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = y^2 - 4y, \\ x + y = 4. \end{cases}$

11.3. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = y^2 - 4y, \\ y = x^2 - 4x; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = -1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x = y^2 - 1. \end{cases}$

11.4. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} |x + 1| + |y| = 1, \\ x + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$

11.5. Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$

11.6. Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a? \end{cases}$

11.7. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (2a-3)x - ay = 3a - 2, \\ 5x - (2a+3)y = 5 \end{cases}$ имеет единственное решение?

11.8. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} ax + (a-1)y = 2a, \\ 3(a+2)x + (4a+1)y = a + 5 \end{cases}$ имеет единственное решение при всех значениях параметра a.

11.9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

11.10. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4{,}5, \\ 2x + (a+1)y = -1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

11.11. Найдите все значения параметров a и b, при которых совпадают множества решений систем уравнений $\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$

11.12. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$ при любых значениях параметра a имеет хотя бы одно решение.

11.13. Определите, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

11.14. Определите, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}(y-x)^2=4,\\ x^2+y^2=3-a\end{cases}$ имеет ровно два решения.

11.15. Найдите наименьшее значение параметра c, при котором система уравнений $\begin{cases}\left(x-c\sqrt{3}\right)^2+y^2-2y=0,\\ \sqrt{3}\,|x|-y=4\end{cases}$ имеет единственное решение.

11.16. Найдите наибольшее значение параметра c, при котором система уравнений $\begin{cases}\left(x+c\sqrt{3}\right)^2+y^2+6y+8=0,\\ \sqrt{3}\,|x|+y=6\end{cases}$ имеет единственное решение.

11.17. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}x=a+\sqrt{y},\\ y^2-x^2-2x+4y+3=0\end{cases}$ имеет решения.

11.18. Докажите, что точки пересечения парабол $y=x^2-5$ и $x=y^2-4$ лежат на одной окружности.

Упражнения для повторения

11.19. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $7^n\cdot 2^{3n}-3^{2n}$ кратно 47.

11.20. Докажите, что значение выражения $\sqrt{23-8\sqrt{7}}+\sqrt{23+8\sqrt{7}}$ является целым числом.

§ 12 Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения

Определение

Две системы уравнений с двумя переменными называют равносильными, если множества их решений совпадают.

Например, системы $\begin{cases}x^2+y^2=0,\\ \sqrt{1-x}-\sqrt{1-y}=0\end{cases}$ и $\begin{cases}|x|+|y|=0,\\ \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}=2\end{cases}$ равносильны, так как множество решений каждой из них состоит из одного элемента — пары (0; 0).

Определение

Если множество решений первой системы уравнений является подмножеством множества решений второй системы уравнений, то вторую систему уравнений называют следствием первой системы уравнений.

Например, система $\begin{cases} x = y, \\ (x + y - 2)(x + y - 4) = 0 \end{cases}$ является следствием системы уравнений $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 2. \end{cases}$

В курсе алгебры 7 класса вы научились решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными. При этом вы использовали метод подстановки или метод почленного сложения левых и правых частей уравнений системы. В ряде случаев эти методы являются также эффективными для решения нелинейных систем уравнений.

«Законность» методов подстановки и сложения обеспечивают такие две теоремы.

Теорема 12.1

Если в системе уравнений

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

заменить во втором уравнении переменную y выражением $f(x)$, то получим систему

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; f(x)) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

равносильную данной.

Доказательство

Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы (1). Тогда получаем два верных числовых равенства: $y_0 = f(x_0)$ и $F(x_0; y_0) = 0$. Во втором равенстве заменим число y_0 равным ему числом $f(x_0)$. Получим верное числовое равенство $F(x_0; f(x_0)) = 0$. Это означает, что пара $(x_0; y_0)$ является решением системы (2).

Аналогично можно показать, что если пара $(x_1; y_1)$ является решением системы (2), то она также является решением системы (1).

Следовательно, системы (1) и (2) равносильны. ■

Теорема 12.2

Если в системе уравнений $\begin{cases} F(x; y) = 0, \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ заменить одно из уравнений уравнением $F(x; y) + G(x; y) = 0$, то получим систему, равносильную данной.

Доказательство теоремы 12.2 аналогично доказательству теоремы 12.1. Проведите его самостоятельно.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

Решение. Имеем: $\begin{cases} \dfrac{2}{y^2-1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5. \end{cases}$

Подставив в первое уравнение вместо y^2 двучлен $x + 5$, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5. \end{cases} \text{ Отсюда } \begin{cases} 2x = x + 4, \\ y^2 = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 9; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (4; 3), (4; –3). ■

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x - y)\left(y - \dfrac{1}{x}\right) = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$

Решение. При решении этой системы представляется естественным перейти к такой совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y - \dfrac{1}{x} = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Но такой переход не является равносильным. Действительно, множество решений первой системы совокупности содержит пару (0; 0), не являющуюся решением исходной системы.

Причина появления постороннего решения состоит в том, что при замене системы на совокупность не была учтена область определения исходной системы уравнений — множество $\{(x; y) \mid x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, y \in \boldsymbol{R}\}$.

На самом деле исходная система равносильна такой совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ y^2-x=0,\\ x\neq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}y-\dfrac{1}{x}=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: (1; 1). ■

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2-x=4,\\ 2x^2-xy-4x+y+2=0.\end{cases}$

Решение. Разложим на множители левую часть второго уравнения системы: $2x^2-xy-4x+y+2=2x^2-4x+2-xy+y=2(x-1)^2-y(x-1)=$ $=(x-1)(2x-2-y)$.

Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=4,\\ (x-1)(y-2x+2)=0.\end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ x^2+y^2-x=4,\end{cases}\\ \begin{cases}y-2x+2=0,\\ x^2+y^2-x=4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Каждую из этих систем решите самостоятельно методом подстановки.

Ответ: (1; 2), (1; –2), (0; –2), $\left(\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right)$. ■

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2-2x=0,\\ x^2-2xy+1=0.\end{cases}$

Решение. Сложим почленно левые и правые части уравнений системы. Получим:

$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1=0,$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2=0.$$

Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases}(x-y)^2+(x-1)^2=0,\\ x^2+y^2-2x=0.\end{cases} \quad (*)$$

Первое уравнение системы (*) имеет единственное решение — пару (1; 1). С помощью проверки убеждаемся, что пара (1; 1) является решением второго уравнения системы (*).

Ответ: (1; 1). ■

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ xy(x+y)=-2.\end{cases}$

Решение. Умножим обе части второго уравнения на 3 и раскроем скобки:

$$\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ 3x^2y+3y^2x=-6.\end{cases}$$

Эта система равносильна системе: $\begin{cases}x^3+y^3+3x^2y+3y^2x=1,\\ xy(x+y)=-2.\end{cases}$

Отсюда $\begin{cases}(x+y)^3=1,\\ xy(x+y)=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-2.\end{cases}$

Полученную систему можно решить методом подстановки. Но существует и другой приём. Из теоремы, обратной теореме Виета, следует, что числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-t-2=0$, имеющего корни -1 и 2. Отсюда если $x=-1$, то $y=2$, и наоборот, если $x=2$, то $y=-1$.

Ответ: (–1; 2), (2; –1). ■

В ряде случаев для решения систем нелинейных уравнений эффективными являются методы почленного умножения и деления левых и правых частей уравнений системы.

Теорема 12.3

Если в системе уравнений $\begin{cases}F(x;y)=c_1,\\ G(x;y)=c_2,\end{cases}$ **где** $c_1\neq 0$ **и** $c_2\neq 0$, **заменить одно из уравнений уравнением** $F(x;y)\cdot G(x;y)=c_1c_2$ **или уравнением** $\dfrac{F(x;y)}{G(x;y)}=\dfrac{c_1}{c_2}$, **то получим систему, равносильную данной.**

Доказательство теоремы 12.3 аналогично доказательству теоремы 12.1. Проведите его самостоятельно.

Обратим внимание, что теорему 12.3 нельзя применять к тем системам, в которых не выполняется требование $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Например, система $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 1 \end{cases}$ имеет два решения: (1; 1) и (–1; –1). Если второе уравнение этой системы заменить на такое: $xy(x - y) = 0$, то получим систему $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy(x - y) = 0, \end{cases}$ имеющую бесконечно много решений вида $(t; t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y^3 = 81, \\ x^3y^2 = 3. \end{cases}$

Решение. Данная система равносильна системе: $\begin{cases} x^5y^5 = 243, \\ x^3y^2 = 3. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} xy = 3, \\ x(xy)^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 3, \\ x = \frac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = 9. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$. ■

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x + y)xy = 6, \\ (x - y)xy = 2. \end{cases}$

Решение. Данная система равносильна системе: $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} = 3, \\ (x + y)xy = 6. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x + y = 3x - 3y, \\ (x + y)xy = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ 3y \cdot 2y^2 = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ y^3 = 1. \end{cases}$

Ответ: (2; 1). ■

1. Какие две системы уравнений называют равносильными?
2. Какую систему уравнений называют следствием данной?
3. Сформулируйте теорему, позволяющую решать системы уравнений с двумя переменными методом подстановки.
4. Сформулируйте теорему, позволяющую решать системы уравнений с двумя переменными методом почленного сложения левых и правых частей уравнений системы.
5. Сформулируйте теорему, позволяющую решать системы уравнений с двумя переменными методом почленного умножения и деления левых и правых частей уравнений системы.

Упражнения

12.1. Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60. \end{cases}$

12.2. Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

12.3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x + y}{x - 1} - \dfrac{x - y}{2y} = 2, \\ x - y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{2}{y-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{3}{y}. \end{cases}$

12.4. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{2}{x-1}, \\ \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{5}{y+1} = 1, \\ \dfrac{4}{x+5} = \dfrac{2}{y}. \end{cases}$

12.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y^2 = 2, \\ 2y^2 + x^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + 6x = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ x^3 - xy^2 + x^2 = 3. \end{cases}$

12.6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y^3 = 2, \\ 2x + x^2 + 5y^3 = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^3 + x^2 y + y^2 = 6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y = 1, \\ y^3 + x^6 = (2y - 1)^2; \end{cases}$

12.7. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (x - 2)(y + 2) = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 3x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7, \\ (2x - y)y = y; \end{cases}$

3) $\begin{cases}(x+4)(y-1)=x^2+5x+4,\\ x^2-y^2-3x+8=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y=23,\\ x^2+y^2+2xy=9.\end{cases}$

12.8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}2x^2-3xy+5y=5,\\ (x-2)(y-1)=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x-1)y=2x-2,\\ x^2+y^2+3xy=4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x^2-xy-3y=7,\\ 2x^2+x-3=(x-1)(y+5);\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=9,\\ 4x^2+xy+4y^2=18.\end{cases}$

◆ ◆

12.9. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}x^2+xy=15,\\ y^2+xy=10;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+3xy=18,\\ xy+4y^2=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2y^2+x^2+xy=4,\\ 3xy-2y=5;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+y+\frac{1}{4}=0,\\ y^2+x+\frac{1}{4}=0.\end{cases}$

12.10. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}3x^2+xy-2x+y-5=0,\\ 2x^2-xy-3x-y-5=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+4xy=5,\\ y^2-2xy=-1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=12,\\ 4x+3xy-x^2=16;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=0,\\ y^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0.\end{cases}$

12.11. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}3x^2+3y^2-11x-7y+10=0,\\ x^2+y^2-4x-3y+5=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^3+2x^2y+xy^2-x-y=2,\\ y^3+2xy^2+x^2y+x+y=6;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-x+1=y,\\ y^2-y+1=x;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^3+3x^2y+3xy^2=1,\\ y^3+x+y=1.\end{cases}$

12.12. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}2x^2-5xy+3x-2y=2,\\ 5xy-2x^2+7x-8y=-22;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x^2+y)^2(x^2-xy+y)=4,\\ (x^2+y)^2(x^2+xy+y)=12;\end{cases}$

3) $\begin{cases}y^2+x+1=-y,\\ x^2+y+1=-x;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^3-3x^2y+3xy^2=-1,\\ y^3+y-x=1.\end{cases}$

12.13. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2y^5 = 1, \\ x^5y^2 = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-y)^2(x+2y) = 4, \\ (x-y)^4(x+2y)^5 = 16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3y + x^2y^2 = 6, \\ x^2y^2 + xy^3 = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2xy + 6x - y^2 - 3y = 14, \\ 2x^2 + 4x - xy - 2y = 35; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 - x - 3y = 24, \\ 2x^2 + xy - y^2 - 2x + y = 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 40, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = 10. \end{cases}$

12.14. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^8y^6 = 64, \\ x^6y^8 = 256; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+y)(x-2y)^4 = 81, \\ (x+y)^6(x-2y)^3 = 27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy^3 + x^3y = -10, \\ x^2y^4 + x^4y^2 = 20; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + 3xy + x + 3y = 8, \\ 3y^2 + xy - 2x - 6y = -4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = -7, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 2y = 5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 4x - 2y = 5, \\ x^2 - 3xy - 2x + 6y = 6. \end{cases}$

12.15. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3y^5 = 4x^2y^3 - 9, \\ xy = x^2y^3 - 6. \end{cases}$

12.16. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2y + 6 = \dfrac{y^3}{x^2}, \\ x^2y - 1 = \dfrac{4x^4}{y^2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^8 = x^4y^4 + 1, \\ 3y^8 = x^4y^4 + 2. \end{cases}$

◆ ◆ ◆

12.17. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2y^2) = 1 + 4y^4, \\ (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2y^2) = 1 - 4y^4. \end{cases}$

12.18. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x^2 + y^2 - xy)(x - y) = 1 + y^3, \\ (x^2 + y^2 + xy)(x + y) = 1 - y^3. \end{cases}$

12.19. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 = 2y - 1, \\ x^4 + y^4 = 2. \end{cases}$

12.20. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^4 + 4y^4 = 5, \\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 = x - 2, \\ x^4 + y^4 = 82. \end{cases}$

12.21. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$

12.22. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2} = 5. \end{cases}$

Упражнения для повторения

12.23. Найдите решения неравенства $|x+2|\,(x^2 - a^2) > 0$ в зависимости от значения параметра a.

12.24. Постройте график функции $y = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x-1}$.

§ 13 Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными

В курсе алгебры 8 класса вы научились решать уравнения методом замены переменной. Удачно выполненная замена сводит решение данного уравнения к решению более простого уравнения. Этот метод эффективен и при решении целого ряда систем уравнений.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144, \\ x^2 + 4x + 5y = 24. \end{cases}$

Решение. Запишем данную систему в таком виде:

$$\begin{cases} (x^2 + x)(3x + 5y) = 144, \\ (x^2 + x) + (3x + 5y) = 24. \end{cases}$$

Пусть $x^2 + x = u$, $3x + 5y = v$. Тогда $\begin{cases} uv = 144, \\ u + v = 24. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} u = 12, \\ v = 12. \end{cases}$

Далее, $\begin{cases} x^2 + x = 12, \\ 3x + 5y = 12; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -4, \end{array}\right. \\ 3x + 5y = 12. \end{cases}$

Ответ: $\left(3; \frac{3}{5}\right), \left(-4; \frac{24}{5}\right)$. ■

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Решение. Имеем: $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1, \\ 2x + y + 1 + x + y = 5. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{2x + y + 1} = u$, $\sqrt{x + y} = v$. Получаем: $\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} u = 2, \\ v = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} u = -1, \\ v = -2. \end{cases}$

Поскольку $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$, то исходная система равносильна такой:

$\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} = 2, \\ \sqrt{x + y} = 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} 2x + y + 1 = 4, \\ x + y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$

Ответ: $(2; -1)$. ■

Определение

Многочлен, все члены которого имеют одну и ту же степень, называют однородным многочленом.

Например,

$x - 2y$ — однородный многочлен первой степени,

$x^2 - 3xy - y^2$ — однородный многочлен второй степени,

$3x^3 - 2xy^2 + x^2y - y^3$ — однородный многочлен третьей степени.

Для решения систем вида $\begin{cases} F(x; y) = a, \\ G(x; y) = b, \end{cases}$ где $F(x; y)$ и $G(x; y)$ — однородные многочлены, эффективной является замена $\frac{x}{y} = t$. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Решение. Несложно убедиться, что пара чисел вида $(x_0; 0)$ не является решением данной системы. Разделив обе части первого уравнения на y^2, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{5x}{y} + 6 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Пусть $\dfrac{x}{y} = t$. Тогда из первого уравнения получаем, что $t^2 - 5t + 6 = 0$. Отсюда $t = 2$ или $t = 3$.

Исходная система равносильна совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Каждую из этих систем можно решить методом подстановки. Сделайте это самостоятельно.

Ответ: $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $\left(3\sqrt{\dfrac{7}{17}}; \sqrt{\dfrac{7}{17}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\dfrac{7}{17}}; -\sqrt{\dfrac{7}{17}}\right)$. ■

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$

Решение. Очевидно, что пара чисел вида $(x_0; 0)$ не является решением данной системы. Тогда можно выполнить замену $\dfrac{x}{y} = t$. Отсюда $x = yt$.

Имеем: $\begin{cases} y^3t^3 - y^3 = 7, \\ y^3t^2 + y^3t = 6. \end{cases}$ Разделив почленно левые и правые части уравнений системы, получаем $\dfrac{y^3t^3 - y^3}{y^3t^2 + y^3t} = \dfrac{7}{6}$. Отсюда $\dfrac{y^3(t^3 - 1)}{y^3(t^2 + t)} = \dfrac{7}{6}$;

$$6t^3 - 7t^2 - 7t - 6 = 0;$$
$$6t^3 - 12t^2 + 5t^2 - 10t + 3t - 6 = 0;$$
$$6t^2(t - 2) + 5t(t - 2) + 3(t - 2) = 0;$$
$$(t - 2)(6t^2 + 5t + 3) = 0;$$
$$t = 2.$$

Исходная система равносильна системе: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $(2; 1)$. ■

Если в многочлене $F(x; y)$ заменить x на y, а y на x, то полученный многочлен будем обозначать $F(y; x)$. Например, если $F(x; y) = x^2 - xy^8 + y^3$, то $F(y; x) = y^2 - x^8y + x^3$.

Определение

Если равенство $F(x; y) = F(y; x)$ является тождеством, то многочлен $F(x; y)$ называют симметрическим.

Приведём примеры симметрических многочленов: $x + y$, $x^2 - xy + y^2$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$.

Введём обозначения $u = x + y$, $v = xy$. Многочлены u и v называют **элементарными симметрическими многочленами от x и y**. Это название связано с тем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 13.1

Любой симметрический многочлен с переменными x и y можно представить в виде многочлена с переменными u и v, где u и v — элементарные симметрические многочлены с переменными x и y.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки курса алгебры 9 класса. Приведём несколько примеров, иллюстрирующих эту теорему:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;

$x^3 + y^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv$;

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$.

Рассмотрим систему вида $\begin{cases} F(x; y) = a, \\ G(x; y) = b, \end{cases}$ где $F(x; y)$ и $G(x; y)$ — симметрические многочлены.

Введя замену

$$x + y = u,\ xy = v,$$

получаем систему вида $\begin{cases} F_1(u; v) = a, \\ G_1(u; v) = b. \end{cases}$

Такая замена является эффективной при решении целого ряда систем уравнений.

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 15. \end{cases}$

Решение. Заметим, что левые части уравнений системы — симметрические многочлены.

Подготовим данную систему к замене $x + y = u$, $xy = v$. Имеем:

$$\begin{cases}(x+y)^2 - 2xy + x + y = 8,\\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) + xy(x+y) = 15.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}u^2 - 2v + u = 8,\\ u(u^2 - 3v) + uv = 15;\end{cases}$ $\begin{cases}-2v = 8 - u^2 - u,\\ u(u^2 - 2v) = 15.\end{cases}$

Тогда $u(u^2 + 8 - u^2 - u) = 15$; $u^2 - 8u + 15 = 0$; $u = 5$ или $u = 3$.

Получаем: $\begin{cases}u = 5,\\ v = 11\end{cases}$ или $\begin{cases}u = 3,\\ v = 2.\end{cases}$

Исходная система равносильна совокупности двух систем.

а) $\begin{cases}x + y = 5,\\ xy = 11.\end{cases}$ Эта система решений не имеет.

б) $\begin{cases}x + y = 3,\\ xy = 2.\end{cases}$ Отсюда $\begin{cases}x = 1,\\ y = 2\end{cases}$ или $\begin{cases}x = 2,\\ y = 1.\end{cases}$

Ответ: (1; 2), (2; 1). ■

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 72,\\ x^2 + xy + y^2 = 13.\end{cases}$

Решение. Поскольку левые части уравнений являются симметрическими многочленами, то можно воспользоваться заменой $x + y = u$, $xy = v$.

Однако представляется более эффективным, преобразовав систему к виду

$$\begin{cases}(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = 72,\\ (x^2 + y^2) + xy = 13,\end{cases}$$

выполнить такую замену: $x^2 + y^2 = u$, $xy = v$.

Имеем: $\begin{cases}u^2 - u - 2v^2 = 72,\\ u + v = 13.\end{cases}$

Решив эту систему методом подстановки, получаем:

$\begin{cases}u = 10,\\ v = 3\end{cases}$ или $\begin{cases}u = 41,\\ v = -28.\end{cases}$

Осталось решить системы $\begin{cases}x^2 + y^2 = 10,\\ xy = 3\end{cases}$ и $\begin{cases}x^2 + y^2 = 41,\\ xy = -28.\end{cases}$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: (3; 1), (1; 3), (–3; –1), (–1; –3). ■

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x. Его дискриминант равен $y^4 - 16$. Тогда это уравнение имеет решения при $y^4 - 16 \geqslant 0$. Отсюда $|y| \geqslant 2$.

Запишем второе уравнение системы так:

$$x^2 - 4x + 4 = 2y - y^2. \text{ Отсюда } (x - 2)^2 = 2y - y^2.$$

Тогда $2y - y^2 \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Поскольку неравенства $|y| \geqslant 2$ и $0 \leqslant y \leqslant 2$ должны выполняться одновременно, то можно сделать такой вывод: если исходная система имеет решения, то ими могут быть только пары чисел вида $(x; 2)$.

Подставив $y = 2$ в исходную систему, получим $x = 2$.

Ответ: (2; 2). ■

Пример 8. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x - 4| + |x + 4| = y^3, \\ ax^2 + y + a^2 - a = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением данной системы, то и пара чисел $(-x_0; y_0)$ также является её решением. Для того чтобы данная система имела единственное решение, должно выполняться равенство $x_0 = -x_0$. Отсюда $x_0 = 0$. Тогда необходимо, чтобы пара $(0; y_0)$ была решением данной системы.

Имеем: $\begin{cases} |0 - 4| + |0 + 4| = y_0^3, \\ a \cdot 0^2 + y_0 + a^2 - a = 2. \end{cases}$

Отсюда $y_0 = 2$ и $a = 0$ или $a = 1$.

При этих значениях параметра a пара $(0; 2)$ является решением данной системы. Однако это не означает, что система не имеет других решений. Поэтому найденные значения параметра a следует проверить.

При $a = 0$ имеем: $\begin{cases} |x - 4| + |x + 4| = y^3, \\ y = 2. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} |x - 4| + |x + 4| = 8, \\ y = 2. \end{cases}$

Первое уравнение последней системы можно решить, раскрыв модули. Мы же воспользуемся геометрической интерпретацией: значение выражения $|x - 4| + |x + 4|$ — это сумма расстояний от точки A (x) координатной прямой до точек B (4) и C (–4) (рис. 13.1). Тогда множеством

решений первого уравнения системы является промежуток $[-4; 4]$. Следовательно, полученная система имеет бесконечно много решений.

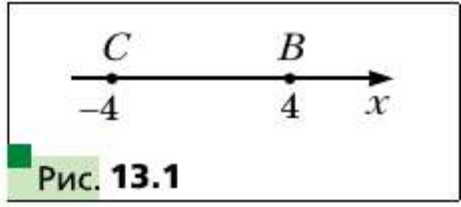


Рис. **13.1**

При $a = 1$ имеем: $\begin{cases} |x-4| + |x+4| = y^3, \\ x^2 + y = 2. \end{cases}$

Так как $|x - 4| + |x + 4| \geqslant 8$ (докажите это самостоятельно), то $y^3 \geqslant 8$, т. е. $y \geqslant 2$. Из второго уравнения этой системы следует, что $y \leqslant 2$. Следовательно, эта система может иметь решения только вида $(x_0; 2)$. Подставив $y = 2$ во второе уравнение системы, получаем, что $x = 0$. Тогда пара $(0; 2)$ является единственным решением этой системы.

Ответ: $a = 1$. ■

1. Какой многочлен называют однородным?
2. Какой многочлен называют симметрическим?
3. Какие многочлены называют элементарными симметрическими многочленами от x и y?
4. Как можно представить любой симметрический многочлен от переменных x и y?

Упражнения

13.1. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y)^4 + 4(x+y)^2 = 117, \\ x - y = 25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}} + \sqrt{\dfrac{5x}{x+y}} = \dfrac{34}{15}, \\ x + y = 12. \end{cases}$

13.2. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0. \end{cases}$

13.3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2xy - \dfrac{3x}{y} = 15, \\ xy + \dfrac{x}{y} = 15; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{36}, \\ xy^2 - x^2y = 324; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + 3y} + \dfrac{x + 3y}{xy} = 2, \\ \dfrac{xy}{x - y} + \dfrac{x - y}{xy} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

13.4. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 6, \\ xy + x - y = -5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3}, \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x + 1}{x + y}} + \sqrt{\dfrac{x + y}{x + 1}} = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x + 1}{y + 2}} - \sqrt{\dfrac{y + 2}{x + 1}} = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + \dfrac{x^2}{y^2} = 7, \\ \dfrac{(x + y)x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$

13.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2 + 2y + 1} = 1 - 2y, \\ 6x + y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

13.6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + \sqrt{3x^2 - 2y + 3} = \dfrac{2}{3}y + 5, \\ 3y - 2x = 5. \end{cases}$

13.7. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{4 - x + y} + \sqrt{9 - 2x + y} = 7, \\ 2y - 3x = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

13.8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 3} = 7, \\ 3x + 2y = 22; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

13.9. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

13.10. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 5y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0, \\ x + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$

13.11. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 7, \\ y^2 + xy = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 3y^2 = 2, \\ x^2 - xy + 5y^2 = 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$

13.12. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = -9, \\ x^2 - y^2 - 2xy = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$

13.13. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 40; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - 3x^2y = -4, \\ y^3 - xy^2 = -1. \end{cases}$

13.14. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (x + y)(x^2 - y^2) = 9, \\ (x - y)(x^2 + y^2) = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 - 2y^2) = 4, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 + 2y^2) = 3. \end{cases}$

13.15. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8. \end{cases}$

13.16. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 18, \\ x^2 + y^2 - xy = 13. \end{cases}$

13.17. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy(x - 1)(y - 1) = 72, \\ (x + 1)(y + 1) = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 10, \\ (x + y)(xy + 1) = 25. \end{cases}$

13.18. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 1, \\ x^2y + xy^2 = 16; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$

13.19. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2y + y^2x = 20, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$

13.20. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = 5, \\ xy - x - y = -1. \end{cases}$

13.21. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 12, \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

13.22. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 5, \\ 7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155. \end{cases}$

◆ ◆ ◆

13.23. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}} = \dfrac{20}{x + y}, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0, \\ 2x^2 + 3y^2 - 2x - 6y - 13 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$

13.24. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} = \dfrac{12}{x - y}, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - 3y + 4x = 4, \\ y(y - 4)(y + 4x) = -21. \end{cases}$

13.25. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + 6 = 0, \\ 24 - y^2 = (4x^2 - y^2)^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 + 3y^2 = 2xy, \\ |xy - 2| = 6 - x^2. \end{cases}$

13.26. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^4 = 0, \\ x^2 - 4x + 6 - 2y^6 = 0. \end{cases}$

13.27. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4x - 5 = 0, \\ \sqrt{1 - y^2} + x^2 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3 - (y+1)^2 = \sqrt{x - y}, \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9}. \end{cases}$

13.28. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0, \\ \sqrt{4 - x^2} + y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - (x-3)^2 = \sqrt{x - y}, \\ y^2 - 4 = \sqrt{x - y - 1}. \end{cases}$

13.29. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.30. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 3y - a\sqrt{x^2+1} = 1, \\ y + x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.31. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} a(x^4+1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

13.32. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^5 + y^5 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^3 - y^2 + y = x^2, \\ x^3 - x^2 + x = y^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y}{1+y^2} = x. \end{cases}$

13.33. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 = 8y + x, \\ y^3 = 8x + y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = x. \end{cases}$

Упражнения для повторения

13.34. При каких значениях параметра a уравнение $(\sqrt{x} - a)(3x^2 + x - 2) = 0$ имеет единственное решение?

13.35. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ делится нацело на 10.

§ 14 Системы уравнений (неравенств) как математические модели реальных ситуаций

Рассмотрим задачи, в которых системы уравнений (неравенств) служат математическими моделями реальных ситуаций.

Пример 1. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились через 2 ч. С какой скоростью шёл каждый турист, если для прохождения всего расстояния между пунктами первому из них нужно на 54 мин больше, чем второму?

Решение. Пусть скорость первого туриста равна x км/ч, а второго — y км/ч, $x < y$. До встречи первый турист прошёл $2x$ км, а второй — $2y$ км. Вместе они прошли 18 км. Тогда $2x + 2y = 18$.

Расстояние между пунктами первый турист проходит за $\frac{18}{x}$ ч, а второй — за $\frac{18}{y}$ ч. Так как первому туристу для прохождения этого расстояния нужно на 54 мин $= \frac{54}{60}$ ч $= \frac{9}{10}$ ч больше, чем второму, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9-y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Решив второе уравнение последней системы, получаем: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корень -36 не подходит по смыслу задачи. Следовательно, $y = 5$, $x = 4$.

Ответ: 4 км/ч, 5 км/ч. ■

Пример 2. Два работника могут вместе выполнить производственное задание за 10 дней. После 6 дней совместной работы первого из них перевели на другое задание, а второй продолжал работать. Через 2 дня самостоятельной работы второго оказалось, что сделано $\frac{2}{3}$ всего задания. За сколько дней каждый работник может выполнить это производственное задание, работая самостоятельно?

Решение. Пусть первый работник может выполнить всё задание за x дней, а второй — за y дней. За 1 день первый работник выполняет

$\frac{1}{x}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{x}$ часть задания. Второй работник за 1 день выполняет $\frac{1}{y}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{y}$ часть задания. Так как за 10 дней совместной работы они выполняют всё задание, то $\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1$.

Первый работник работал 6 дней и выполнил $\frac{6}{x}$ часть задания, а второй работал 8 дней и выполнил $\frac{8}{y}$ часть задания. Так как в результате было выполнено $\frac{2}{3}$ задания, то $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1,\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3},\end{cases}$$

решением которой является пара чисел $x=15$, $y=30$ (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, первый работник может выполнить задание за 15 дней, а второй — за 30 дней.

Ответ: 15 дней, 30 дней. ■

В следующей задаче математической моделью реальной ситуации является система линейных неравенств с двумя переменными.

Пример 3. Каждый из участников математической викторины получил одну из оценок 9 баллов, 10 баллов, 11 баллов, 12 баллов. Оценки «9», «10», «12» выставлены одинаковому количеству участников, а оценок «11» было поставлено больше, чем остальных оценок, вместе взятых. Оценку выше «10» получили менее 10 участников. Сколько оценок «10» и сколько оценок «11» было поставлено, если в викторине принимали участие не менее 12 человек?

Решение. Пусть оценки «9», «10», «12» получили по x участников, а оценку «11» — y участников. Так как оценок «11» было получено больше, чем остальных оценок, вместе взятых, то $y>3x$. Оценку выше «10» получили менее 10 участников, поэтому $x+y<10$. Так как в викторине принимали участие не менее 12 человек, то $3x+y\geqslant 12$. Получили систему неравенств:

$$\begin{cases}y>3x,\\ x+y<10,\\ 3x+y\geqslant 12.\end{cases}$$

Отсюда $x + y > x + 3x = 4x$. Тогда $4x < 10$; $x < 2{,}5$.

Так как x — целое неотрицательное число, то из неравенства $x < 2{,}5$ следует, что $x = 0$, или $x = 1$, или $x = 2$.

При $x = 0$ получаем систему $\begin{cases} y > 0, \\ y < 10, \\ y \geqslant 12, \end{cases}$ не имеющую решений.

При $x = 1$ получаем систему $\begin{cases} y > 3, \\ y < 9, \\ y \geqslant 9, \end{cases}$ которая также решений не имеет.

При $x = 2$ имеем: $\begin{cases} y > 6, \\ y < 8, \\ y \geqslant 6. \end{cases}$ Отсюда $y = 7$.

Следовательно, оценку «10» получили 2 участника, оценку «11» — 7 участников.

Ответ: 2 участника, 7 участников. ■

Пример 4. Авиалинию, связывающую города A и B, обслуживают самолёты трёх типов. Каждый самолёт первого, второго и третьего типа может взять на борт соответственно 230, 100 и 40 пассажиров. Все самолёты линии могут одновременно перевезти 760 пассажиров. Сколько самолётов каждого типа обслуживают эту авиалинию?

Решение. Обозначим через x, y, z количество самолётов первого, второго, третьего типов соответственно. Тогда получаем уравнение $230x + 100y + 40z = 760$, которое надо решить в натуральных числах, т. е. принять в качестве ответа только те решения, которые являются натуральными числами. Имеем:

$$\begin{cases} 230x + 100y + 40z = 760, \\ x \in \boldsymbol{N}, \\ y \in \boldsymbol{N}, \\ z \in \boldsymbol{N}. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} 23x + 10y + 4z = 76, \\ x \in \boldsymbol{N}, \\ y \in \boldsymbol{N}, \\ z \in \boldsymbol{N}. \end{cases}$

Имеем: $23x = 76 - (10y + 4z)$. Поскольку $y \geqslant 1$ и $z \geqslant 1$, то $10y + 4z \geqslant 14$. Тогда $23x = 76 - (10y + 4z) \leqslant 62$. Отсюда $x \leqslant \frac{62}{23}$. Из уравнения системы следует, что x — чётное число. Следовательно, $x = 2$.

С учётом найденного значения x получаем систему:

$$\begin{cases} 10y + 4z = 30, \\ y \in \boldsymbol{N}, \\ z \in \boldsymbol{N}. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} 5y + 2z = 15, \\ y \in \boldsymbol{N}, \\ z \in \boldsymbol{N}. \end{cases}$$

Из уравнения полученной системы следует, что z — число, кратное 5. Кроме того, $2z = 15 - 5y \leqslant 10$. Отсюда $z \leqslant 5$, а следовательно, $z = 5$, $y = 1$.

Ответ: 2 самолёта, 1 самолёт, 5 самолётов. ■

Упражнения

14.1. От станции M в направлении станции N, расстояние между которыми равно 450 км, отправился скорый поезд. Через 3 ч после этого от станции N в направлении станции M отправился товарный поезд, который встретился со скорым через 3 ч после своего выхода. Скорый поезд преодолевает расстояние между станциями M и N на 7 ч 30 мин быстрее, чем товарный. Найдите скорость каждого поезда.

14.2. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорости автомобиля и автобуса, если за 2 ч автобус проезжает на 40 км больше, чем автомобиль за 1 ч.

14.3. Турист проплыл на лодке по реке от пристани A до пристани B и вернулся обратно за 6 ч. Найдите скорость течения реки, если 2 км по течению реки турист проплывает за то же время, что и 1 км против течения, а расстояние между пристанями A и B составляет 16 км.

14.4. Катер проходит 48 км против течения реки и 30 км по течению реки за 3 ч, а 15 км по течению — на 1 ч быстрее, чем 36 км против течения. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

14.5. Стоимость доставки на стройку одной машины песка составляет 2500 р., а одной машины гравия — 3500 р. За день планируется 50 рейсов, причём транспортные расходы не должны превышать 140 000 р. Сколько машин гравия может быть доставлено за день?

14.6. На соревнованиях по стрельбе каждый участник делает 25 выстрелов. За каждый удачный выстрел он получает 4 очка, а за каждый

промах снимается 2 очка. Сколько промахов может сделать стрелок, чтобы набрать не менее 60 очков?

14.7. Теплоход проходит путь от пункта A до пункта B за 3 ч, а возвращается назад за 4 ч. За какое время проплывут путь от пункта A до пункта B плоты?

14.8. Из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста, один из которых прибыл в город B через 40 мин, а другой — в город A через 1,5 ч после встречи. Найдите скорость движения каждого велосипедиста.

14.9. Расстояние между сёлами M и N равно 36 км. Из села N выехал велосипедист, а через 0,5 ч навстречу ему из села M выехал второй велосипедист, скорость которого на 6 км/ч больше скорости первого. Найдите скорость каждого велосипедиста, если они встретились на середине пути между сёлами M и N.

14.10. Два автомобиля выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Скорость первого автомобиля 50 км/ч, а второго — 40 км/ч. Через 0,5 ч из того же пункта в том же направлении выехал третий автомобиль, который обогнал первый на 1,5 ч позже, чем второй. Найдите скорость третьего автомобиля.

◆ ◆

14.11. В двух сплавах массы меди и цинка относятся как 5 : 2 и 3 : 4. Сколько килограммов первого сплава и сколько килограммов второго надо взять, чтобы, переплавив их, получить 28 кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка?

14.12. Есть два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение масс золота и меди равно 1 : 2, а во втором — 2 : 3. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в полученном слитке окажется столько килограммов золота, сколько было килограммов меди в первом слитке, а если сплавить $\frac{2}{3}$ первого слитка и половину второго, то в полученном слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было килограммов золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

14.13. Расстояние между пристанями A и B равно 28 км. Отчалив от пристани A в направлении пристани B, через 2 ч после начала движения катер встретил плот, отправленный от пристани B по течению реки за 2 ч до начала движения катера. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера, если катер проходит расстояние от пристани A до пристани B и возвращается обратно за 4 ч 48 мин.

14.14. Из пункта A в пункт B вышел товарный поезд. Через 5 ч из пункта B в пункт A вышел пассажирский поезд. Встретились они в пункте C. От пункта C до пункта B товарный поезд шёл 4 ч, а пассажирский от пункта C до пункта A — 6 ч. За сколько часов каждый поезд может преодолеть путь между пунктами A и B?

14.15. Две бригады, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 8 дней. Если первая бригада, работая самостоятельно, выполнит $\frac{1}{3}$ задания, а затем её сменит вторая бригада, то задание будет выполнено за 20 дней. За сколько дней каждая бригада может выполнить данное производственное задание, работая самостоятельно?

14.16. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 6 ч. Если первый тракторист проработает самостоятельно 4 ч, а затем его сменит второй, то этот тракторист закончит вспашку за 9 ч. За какое время, работая самостоятельно, может вспахать поле каждый тракторист?

14.17. Из пунктов A и B (рис. 14.1), расстояние между которыми равно 13 км, одновременно вышли в указанных направлениях два туриста. Скорость туриста, вышедшего из пункта A, равна 4 км/ч, а туриста, вышедшего из пункта B, — 6 км/ч. Через какое время после начала движения расстояние между туристами будет наименьшим?

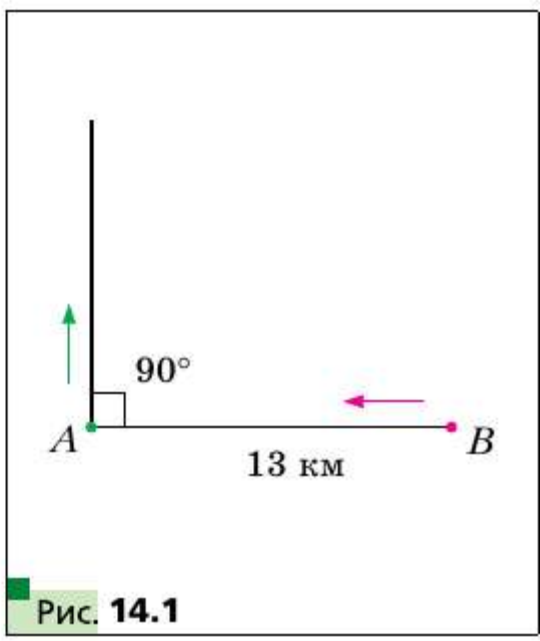


Рис. **14.1**

14.18. Проволочной сеткой длиной 600 м надо огородить участок земли прямоугольной формы. При каких размерах участка его площадь будет наибольшей?

14.19. Два спортсмена выбегают одновременно: первый из пункта A в пункт B, второй из пункта B в пункт A. Они бегут с разными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от пункта A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них сразу поворачивает обратно и встречает другого на расстоянии 400 м от пункта B. Найдите длину дорожки AB.

14.20. Три пловца должны проплыть дистанцию от пункта A до пункта B и обратно. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, а ещё через 5 с — третий. Некоторую точку C, находящуюся между пункта-

ми A и B, все пловцы на пути к пункту B прошли одновременно. Третий пловец, проплыв до пункта B и возвращаясь обратно, встретил второго за 9 м, а первого — за 15 м от пункта B. Найдите скорость третьего пловца, если дистанция AB равна 55 м.

14.21. Из пункта A в пункт B через равные промежутки времени отправляются три автомобиля. В пункт B они прибывают одновременно, потом выезжают в пункт C, находящийся на расстоянии 120 км от пункта B. Первый автомобиль прибывает туда через час после второго. Третий автомобиль, прибыв в пункт C, сразу поворачивает обратно и на расстоянии 40 км от пункта C встречает первый. Найдите скорость первого автомобиля.

14.22. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 ч из пункта A выехал велосипедист, а ещё через 30 мин — мотоциклист. Через несколько минут после выезда мотоциклиста оказалось, что до этого момента все трое преодолели одинаковую часть пути от пункта A до пункта B. Пешеход прибыл в пункт B на 1 ч позднее мотоциклиста. На сколько минут велосипедист прибыл в пункт B раньше пешехода?

14.23. Пристань A находится выше по течению реки, чем пристань B. От пристаней A и B одновременно навстречу друг другу начали движение плот и моторная лодка. Доплыв до пристани A, лодка немедленно повернула обратно и догнала плот в тот момент времени, когда он проплыл $\frac{2}{3}$ расстояния между пристанями A и B. Найдите время, которое тратит плот на путь от пристани A до пристани B, если известно, что моторная лодка проплывает от пристани B до пристани A и обратно за 3 ч.

14.24. Возле дома растут липы и берёзы, причём общее их количество не меньше 14. Если увеличить в два раза количество лип, а количество берёз увеличить на 18, то берёз станет больше, чем лип. Если же увеличить в два раза количество берёз, не изменяя количества лип, то лип всё равно будет больше, чем берёз. Сколько лип и сколько берёз растёт возле дома?

14.25. Два автохозяйства отправили несколько машин для перевозки груза. Количество машин, отправленных из второго автохозяйства, меньше удвоенного количества машин, отправленных из первого. Если бы первое автохозяйство отправило на две машины больше, а второе — на две меньше, то машин из второго автохозяйства было бы больше, чем машин из первого. Сколько машин было отправлено из каждого автохозяйства, если всего было отправлено не более 18 машин?

14.26. В 7 ч утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка приплыла в место назначения не позже 9 ч 50 мин, а вторая — не раньше 10 ч 40 мин того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75 % скорости первой лодки в стоячей воде?

14.27. Двое рабочих изготовили по 60 одинаковых деталей, причём 30 деталей каждый из них сделал, работая с некоторой производительностью, которая у второго рабочего была на 20 % выше, чем у первого. Потом первый рабочий стал изготавливать больше на 2 детали в час, а второй — на 3 детали в час. Первый рабочий потратил на выполнение всего задания не менее 5 ч 30 мин, а второй — не более 4 ч 30 мин. Сколько деталей в час изготавливал второй рабочий во время выполнения первой половины задания?

14.28. Токарю было поручено изготовить 90 деталей, а ученику — 35. Первые 30 деталей токарь делал с производительностью в два раза большей, чем ученик. Изготовляя остальные 60 деталей, он делал ещё на 2 детали в час больше и закончил свою работу не менее чем на 1 ч позже ученика. Однако если бы токарь первые 30 деталей изготавливал с такой же производительностью, что и остальные 60, то он закончил бы работу не ранее чем через 30 мин после ученика. Сколько деталей в час делал ученик?

14.29. На химическом заводе есть цеха трёх типов. В каждом цеху первого, второго и третьего типов работает соответственно 350, 80 и 60 рабочих. Всего в этих цехах завода работает 980 человек. Найдите количество цехов каждого типа.

Упражнения для повторения

14.30. Решите неравенство $\dfrac{2}{x|x-1|} \leqslant -1$.

14.31. Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $|x+5|+|x-3|=a$?

Построение графиков уравнений с двумя переменными

- График уравнения $F(x + a; y) = 0$ можно получить в результате параллельного переноса графика уравнения $F(x; y) = 0$ вдоль оси абсцисс на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.
- График уравнения $F(x; y + b) = 0$ можно получить в результате параллельного переноса графика уравнения $F(x; y) = 0$ вдоль оси ординат на b единиц вниз, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вверх, если $b < 0$.
- График уравнения $F(-x; y) = 0$ можно получить в результате преобразования симметрии относительно оси ординат графика уравнения $F(x; y) = 0$.
- График уравнения $F(x; -y) = 0$ можно получить в результате преобразования симметрии относительно оси абсцисс графика уравнения $F(x; y) = 0$.
- График уравнения $F(kx; y) = 0$, где $k > 0$, можно получить в результате сжатия графика уравнения $F(x; y) = 0$ в k раз к оси ординат, если $k > 1$, или в результате растяжения графика уравнения $F(x; y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат, если $0 < k < 1$.
- График уравнения $F(x; ky) = 0$, где $k > 0$, можно получить в результате сжатия графика уравнения $F(x; y) = 0$ в k раз к оси абсцисс, если $k > 1$, или в результате растяжения графика уравнения $F(x; y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раз от оси абсцисс, если $0 < k < 1$.
- График уравнения $F(|x|; y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ таким образом: построить фигуру M_1, являющуюся графиком уравнения $F(x; y) = 0$ при $x \geqslant 0$, и построить фигуру M_2, симметричную фигуре M_1 относительно оси ординат. Фигура $M_1 \cup M_2$ является искомым графиком.
- График уравнения $F(x; |y|) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x; y) = 0$ таким образом: построить фигуру M_1, являющуюся графиком уравнения $F(x; y) = 0$ при $y \geqslant 0$, и построить фигуру M_2, симметричную фигуре M_1 относительно оси абсцисс. Фигура $M_1 \cup M_2$ является искомым графиком.

Равносильные системы уравнений

Две системы уравнений с двумя переменными называют равносильными, если множества их решений совпадают.

Равносильность систем уравнений

- Если множество решений первой системы уравнений является подмножеством множества решений второй системы уравнений, то вторую систему уравнений называют следствием первой системы уравнений.
- Если в системе уравнений $\begin{cases} y = f(x), \\ F\ (x;\ y) = 0 \end{cases}$ заменить во втором уравнении переменную y выражением $f\,(x)$, то получим систему $\begin{cases} y = f(x), \\ F\ (x;\ f(x)) = 0, \end{cases}$ равносильную данной.
- Если в системе уравнений $\begin{cases} F\ (x;\ y) = 0, \\ G\ (x;\ y) = 0 \end{cases}$ заменить одно из уравнений уравнением $F\ (x;\ y) + G\ (x;\ y) = 0$, то получим систему, равносильную данной.
- Если в системе уравнений $\begin{cases} F\ (x;\ y) = c_1, \\ G\ (x;\ y) = c_2, \end{cases}$ где $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, заменить одно из уравнений уравнением $F\ (x;\ y) \cdot G\ (x;\ y) = c_1 c_2$ или уравнением $\dfrac{F\ (x;\ y)}{G\ (x;\ y)} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то получим систему, равносильную данной.

глава

3 Неравенства с двумя переменными и их системы. Доказательство неравенств

- В этой главе вы ознакомитесь с неравенствами с двумя переменными и их системами. Узнаете, что называют решением неравенства с двумя переменными и решением системы неравенств с двумя переменными.
- Для целого ряда неравенств с двумя переменными и их систем вы научитесь строить множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решением неравенства (системы неравенств).
- Вы узнаете, что означает «доказать неравенство». Познакомитесь с основными методами доказательства неравенств.

§ 15 Неравенства с двумя переменными

Неравенства $2x - y > 1$, $y \geqslant x^2$, $x^2 + y^2 < 4$ являются примерами **неравенств с двумя переменными.**

Определение

Пару значений переменных, обращающую неравенство с двумя переменными в верное числовое неравенство, называют решением неравенства с двумя переменными.

Так, для неравенства $2x - y > 1$ каждая из пар чисел $(3; -1)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$ является его решением, а, например, пара $(0; 0)$ не является его решением.

Определение

Графиком неравенства с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного неравенства.

Пример 1. Изобразите график неравенства $2x - y > 1$.

Решение. Графиком уравнения $2x - y = 1$ является прямая. Эта прямая разбивает координатную плоскость на две области, каждую из которых называют **открытой полуплоскостью**[1]. Покажем, что жёлтая

[1] Открытая полуплоскость отличается от полуплоскости тем, что она не содержит прямую, её ограничивающую.

область (рис. 15.1) является искомым графиком.

Запишем данное неравенство так: $y < 2x - 1$.

Рассмотрим произвольную точку $M\ (x_1;\ y_1)$, принадлежащую указанной открытой полуплоскости.

Пусть прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная оси абсцисс, пересекает прямую $y = 2x - 1$ в точке $K(x_1;\ y_2)$. Имеем: $y_2 = 2x_1 - 1$. Поскольку $y_1 < y_2$, то $y_1 < 2x_1 - 1$. Следовательно, пара $(x_1;\ y_1)$ является решением данного неравенства.

Мы показали, что координаты любой точки жёлтой области являются решением данного неравенства. Осталось показать, что любое решение неравенства $y < 2x - 1$ является координатами точки, принадлежащей указанной области.

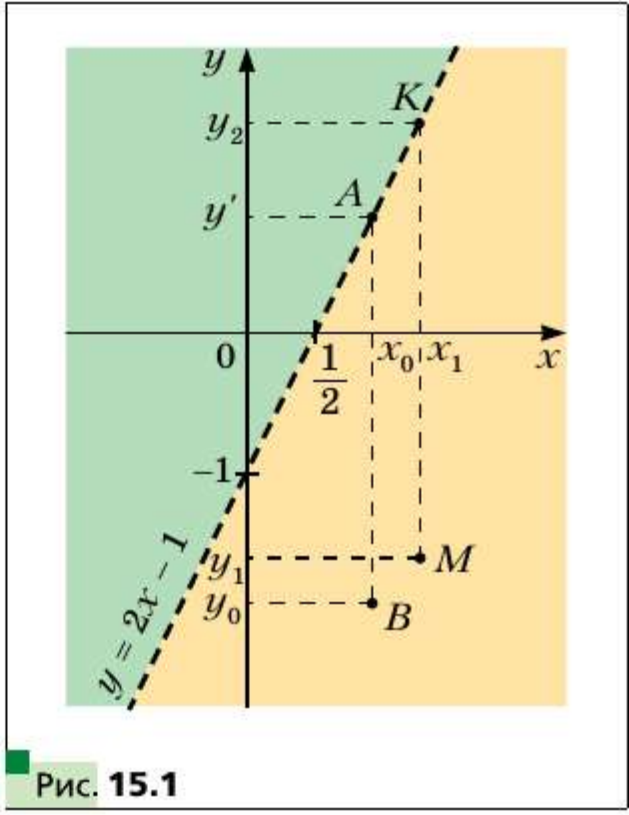


Рис. **15.1**

Рассмотрим пару $(x_0;\ y_0)$, являющуюся решением неравенства $y < 2x - 1$, т. е. $y_0 < 2x_0 - 1$. Пусть $2x_0 - 1 = y'$. Тогда точка $A\ (x_0;\ y')$ принадлежит прямой $y = 2x - 1$ (см. рис. 15.1). Так как $y_0 < y'$, то точка $B(x_0;\ y_0)$ лежит ниже точки A, т. е. принадлежит жёлтой области. ■

Рассуждая аналогично, можно доказать, что зелёная область является графиком неравенства $2x - y < 1$ (см. рис. 15.1).

Также говорят, что неравенства $2x - y > 1$ и $2x - y < 1$ задают соответственно жёлтую и зелёную области.

Договоримся, что в изображении графика пунктирная линия обозначает точки, не принадлежащие искомому графику. Поэтому на рисунке 15.1 прямая $y = 2x - 1$ изображена пунктиром.

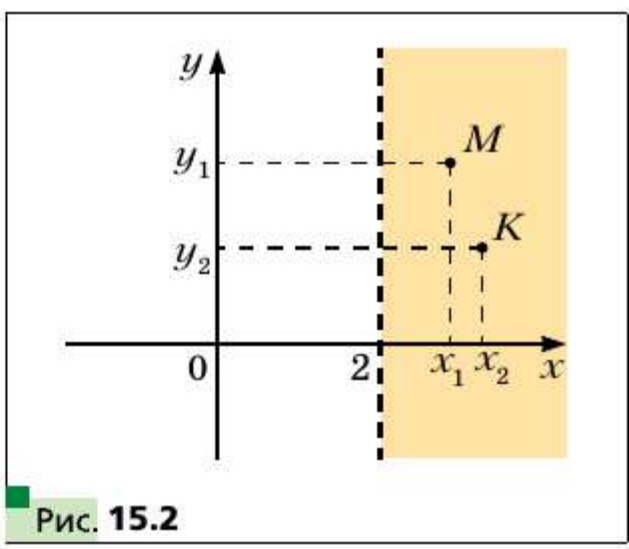


Рис. **15.2**

Пример 2. Изобразите на координатной плоскости xy график неравенства $x > 2$.

Решение. На координатной плоскости xy графиком уравнения $x = 2$ является вертикальная прямая, разбивающая плоскость на две открытые полуплоскости (рис. 15.2). Покажем, что открытая полуплоскость, распо-

ложенная справа от прямой $x = 2$ (закрашенная область), является искомым графиком. Запишем данное неравенство так: $x + 0y > 2$.

Пусть точка $M(x_1; y_1)$ принадлежит указанной области. Тогда $x_1 > 2$, а следовательно, пара $(x_1; y_1)$ является решением данного неравенства.

Пусть пара $(x_2; y_2)$ является решением неравенства $x + 0y > 2$, т. е. $x_2 + 0 \cdot y_2 > 2$. Отсюда $x_2 > 2$. Следовательно, точка $K(x_2; y_2)$ расположена справа от прямой $x = 2$, а значит, принадлежит закрашенной области.

Мы показали, что координаты любой точки открытой полуплоскости являются решением данного неравенства, и наоборот, любое решение неравенства является координатами точки, принадлежащей открытой полуплоскости. ■

Неравенства, рассмотренные в примерах 1 и 2, являются частными случаями неравенства вида $ax + by > c$.

Определение

Линейными неравенствами с двумя переменными называют неравенства вида $ax + by > c$, $ax + by < c$, $ax + by \geqslant c$, $ax + by \leqslant c$, где x и y — переменные, a, b и c — параметры.

Рассуждая аналогично тому, как в примерах 1 и 2, можно показать, что если $a^2 + b^2 \neq 0$, то графиком каждого из неравенств $ax + by > c$ и $ax + by < c$ является одна из открытых полуплоскостей, на которые прямая $ax + by = c$ разбивает координатную плоскость xy.

Графиком каждого из неравенств $ax + by \geqslant c$ и $ax + by \leqslant c$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, является полуплоскость.

Если $a^2 + b^2 = 0$, то графиком линейного неравенства является или вся координатная плоскость, или пустое множество.

Пример 3. Постройте график неравенства $y > x^2$.

Решение. Парабола $y = x^2$ разбивает координатную плоскость на две области, изображённые на рисунке 15.3 жёлтым и зелёным цветом. Рассуждая аналогично тому, как в примере 1, можно показать (сделайте это самостоятельно), что искомым графиком является множество точек, лежащих выше параболы $y = x^2$, т. е. жёлтая область. ■

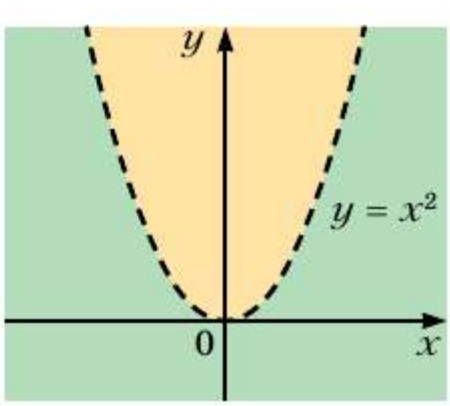


Рис. 15.3

Пример 4. Постройте график неравенства $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Решение. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 4$ является окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Эта окружность разбивает координатную плоскость на две области, изображённые на рисунке 15.4 жёлтым и зелёным цветом. Решениями данного неравенства являются координаты тех и только тех точек, которые удалены от начала координат на расстояние, не большее 2. Поэтому искомым графиком является круг радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 15.4). ■

Заметим, что графиком неравенства $x^2 + y^2 > 4$ является множество точек координатной плоскости, не принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 15.5).

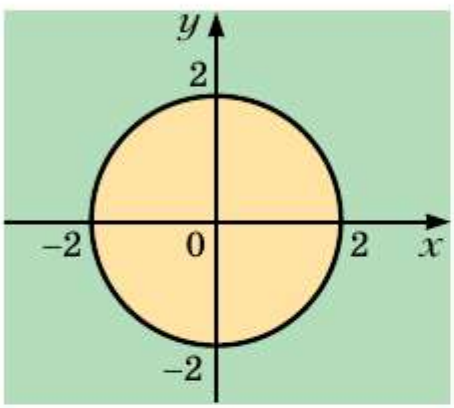


Рис. **15.4**

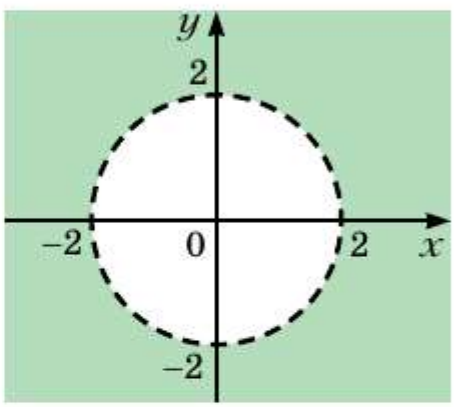


Рис. **15.5**

Примеры 1–4 иллюстрируют такую схему построения графиков неравенств: представить неравенство в виде $F(x; y) > 0$ ($f(x; y) < 0$), затем построить график уравнения $F(x; y) = 0$, который разбивает координатную плоскость на две области. Выяснить, какая из этих областей является искомым графиком неравенства. Если рассматриваемое неравенство является нестрогим, то его график содержит график уравнения $F(x; y) = 0$.

Эта схема применима и в тех случаях, когда график уравнения $F(x; y) = 0$ разбивает плоскость на три и более области, и в тех случаях, когда областью определения выражения $F(x; y)$ является не вся плоскость. Какие из этих областей принадлежат искомому графику, выясняют с помощью «пробных» точек, подобно тому, как мы это делали, решая неравенства с одной переменной методом интервалов. Поясним суть этого приёма на примерах[1].

[1] Строгое обоснование описанного метода выходит за пределы курса алгебры 9 класса.

Пример 5. Постройте график неравенства $xy < 6$.

Решение. График уравнения $xy = 6$ разбивает координатную плоскость на три области (рис. 15.6). В качестве «пробных» рассмотрим точки A $(-3; -3)$, O $(0; 0)$, B $(3; 3)$. Они принадлежат соответственно жёлтой, синей и зелёной областям. При этом пары $(3; 3)$ и $(-3; -3)$ не являются решениями данного неравенства, а пара $(0; 0)$ является решением.

Тогда можно сделать такой вывод: жёлтая и зелёная области не принадлежат графику неравенства, а синяя область ему принадлежит.

Отсюда искомым графиком является синяя область. ■

Пример 6. Изобразите график неравенства $x^2 - y^2 < 0$.

Решение. Графиком уравнения $x^2 - y^2 = 0$ является объединение прямых $x + y = 0$ и $x - y = 0$. Тогда график уравнения $x^2 - y^2 = 0$ разбивает координатную плоскость на четыре области (рис. 15.7).

С помощью «пробных» точек устанавливаем, что искомым графиком является объединение синей и жёлтой областей (см. рис. 15.7). ■

Пример 7. Изобразите график неравенства $|y| \geqslant |x^2 - 2x|$.

Решение. Графиком уравнения $|y| = |x^2 - 2x|$ является объединение парабол $y = x^2 - 2x$ и $y = 2x - x^2$ (убедитесь в этом самостоятельно). Он разбивает координатную плоскость xy на 5 областей (рис. 15.8). С помощью «пробных» точек устанавливаем, что искомым графиком является объединение синей и жёлтой областей вместе с их границами. ■

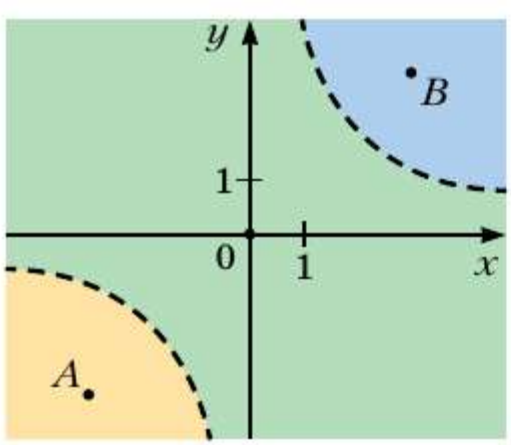


Рис. **15.6**

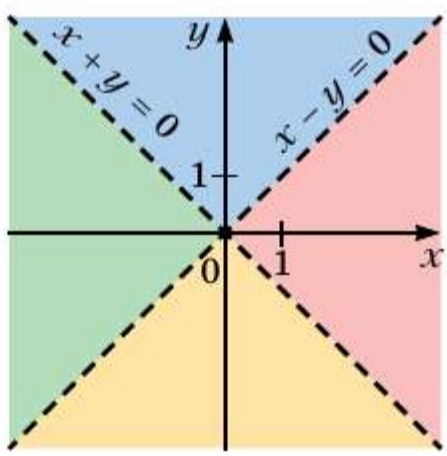


Рис. **15.7**

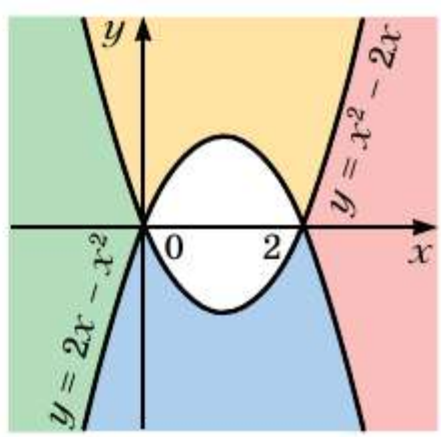


Рис. **15.8**

Пример 8. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $|x - 3| + |a - 2| \leqslant 4$ является промежуток вида $[m; n]$, длина которого не больше 4?

Решение. Графиком данного неравенства на координатной плоскости xa является квадрат, изображённый на рисунке 15.9 (убедитесь в этом самостоятельно).

Если горизонтальная прямая $a = a_0$ пересекает квадрат по отрезку MN, то множеством решений неравенства является промежуток $[x_1; x_2]$, где x_1 и x_2 — абсциссы точек M и N соответственно (см. рис. 15.9).

Из рисунка 15.10 видно, что длина отрезка MN не будет превышать 4, если $-2 < a \leqslant 0$ или $4 \leqslant a < 6$.

Ответ: $-2 < a \leqslant 0$ или $4 \leqslant a < 6$. ■

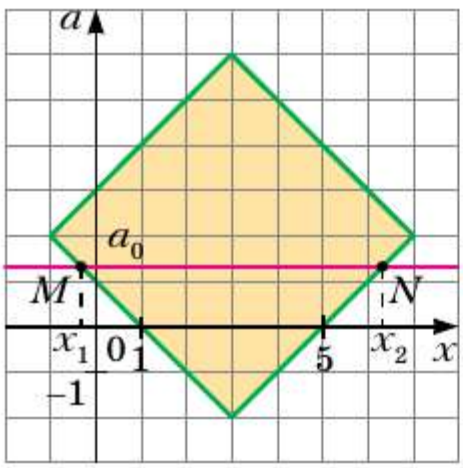


Рис. **15.9**

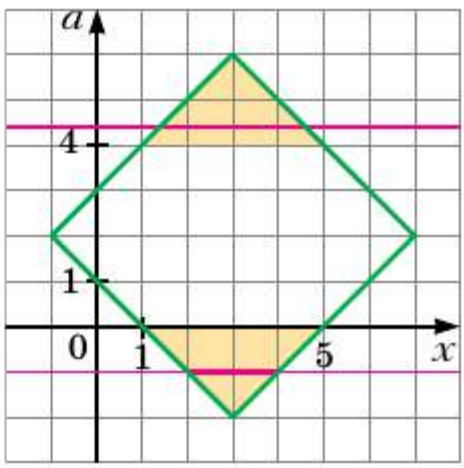


Рис. **15.10**

1. Что называют решением неравенства с двумя переменными?

2. Что называют графиком неравенства с двумя переменными?

3. Что называют линейным неравенством с двумя переменными?

4. Какая фигура является графиком линейного неравенства с двумя переменными?

Упражнения

15.1. Задайте неравенством с двумя переменными полуплоскость с границей $2x + 3y = -1$, содержащую точку A $(-1; 1)$.

15.2. Задайте неравенством с двумя переменными открытую полуплоскость с границей $3x - y = 2$, не содержащую точку B $(0; -1)$.

15.3. Изобразите график неравенства:

1) $3x - y > 1$; 2) $2x + y \geqslant 2$; 3) $y \leqslant -1$; 4) $x < 3$.

15.4. Изобразите график неравенства:

1) $x - 2y < 3$; 2) $x + 4y \geqslant 5$; 3) $y > -2$; 4) $x \geqslant -2$.

15.5. Графиками каких неравенств являются открытые полуплоскости:

1) $3x > y + 1$;
2) $x > 0$;
3) $y \leqslant 0$;
4) $x + y \geqslant 1$;
5) $\dfrac{y - x - 1}{x^2 + y^2} < 0$;
6) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} > 0$;
7) $\dfrac{(x + y)^2}{x + y} \geqslant 0$;
8) $\sqrt{x} > -y^2$;
9) $|x| > x$?

15.6. Графиками каких неравенств являются полуплоскости:

1) $x \geqslant 2$;
2) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
3) $\dfrac{(x - y)^2}{x - y} \geqslant 0$;
4) $\dfrac{y - x + 1}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
5) $\sqrt{x} \geqslant -y^2$;
6) $|x| \geqslant x$?

15.7. Постройте график неравенства:

1) $y < 2x - x^2$;
2) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 1$;
3) $x^2 + 2x + y^2 \geqslant 3$;
4) $xy < 2$;
5) $xy \geqslant 12$;
6) $(x - y)(x + y - 1) < 0$.

15.8. Постройте график неравенства:

1) $y \leqslant -x^2 - 3x$;
2) $(x + 2)^2 + y^2 \leqslant 4$;
3) $x^2 + y^2 - 4y > 0$;
4) $xy \leqslant 6$;
5) $xy > -12$;
6) $(x + y)(x - y - 1) > 0$.

◆ ◆

15.9. Постройте график неравенства:

1) $x^2 > 4$;
2) $|y| < 1$;
3) $y > |x|$;
4) $y \leqslant 2|x| - 1$;
5) $y \geqslant |2|x| - 1|$.

15.10. Постройте график неравенства:

1) $y^2 \leqslant 4$;
2) $|x| < 3$;
3) $y < |x + 1| - 2$.

15.11. Постройте график неравенства:

1) $y < |x^2 - 4x|$;
2) $y \geqslant x^2 - 4|x|$;
3) $y \leqslant |x^2 - 4|x||$;
4) $x^2 - 2|x| + y^2 \leqslant 0$;
5) $x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 > 0$;
6) $|x|y > 3$;
7) $x|y| \leqslant 6$;
8) $|xy| > 12$;
9) $|x| + |y| \leqslant 1$;
10) $|x| - |y| > 1$.

15.12. Постройте график неравенства:

1) $y \geqslant x^2 - 4|x| + 3$;
2) $|y| < x^2 - 4x + 3$;
3) $|y| > x^2 - 4|x| + 3$;
4) $x^2 + y^2 - 4|x| - 4|y| + 7 \leqslant 0$;
5) $x|y| > 8$;
6) $||x| - 1| + |y| \leqslant 1$.

15.13. Постройте график неравенства:

1) $(x+y)^2(x+y+1) \leqslant 0$; 3) $(x-y)|x| \leqslant 0$;

2) $(x+y+1)(x-y)^2 < 0$; 4) $\dfrac{x^2+y^2-4}{|y|} < 0$.

15.14. Постройте график неравенства:

1) $x^2(y-x^2) > 0$; 2) $\dfrac{x^2+y^2-1}{(x^2-y^2)^2} > 0$.

15.15. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $2|x+1| + |a-4| \leqslant 2$ является промежуток вида $[m; n]$, длина которого не меньше 1?

15.16. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x^2-a)(a-2x-8) > 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 4$.

15.17. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $x(x-4) + a^2(a+4) \leqslant ax(a+1)$ содержит не более четырёх целых значений x?

Упражнения для повторения

15.18. Докажите, что при всех натуральных значениях n значение выражения $11 \cdot 3^{2n} + 10 \cdot 2^n$ кратно 7.

15.19. Докажите, что при всех целых n значение выражения

$$(n-2)(n-1)n(n+1)+1$$

является квадратом целого числа.

§ 16 Системы неравенств с двумя переменными

Пара чисел (1; 2) является решением каждого из неравенств $y - x^2 \geqslant 0$ и $y - x \geqslant 1$. В таком случае говорят, что пара (1; 2) является **решением системы неравенств**

$$\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1. \end{cases}$$

Чтобы найти множество решений системы неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, входящих в систему.

Решения системы можно изображать на координатной плоскости. Для этого следует построить графики неравенств, входящих в систему, и найти их пересечение. Полученная фигура является изображением множества решений системы.

Построим изображение решений записанной выше системы.

Графиком первого неравенства является множество точек, лежащих не ниже параболы $y = x^2$. Эта фигура показана на рисунке 16.1 красной горизонтальной штриховкой. Графиком второго неравенства является полуплоскость с границей $y - x = 1$, показанная на рисунке 16.1 синей вертикальной штриховкой. Фигура, изображающая решения системы, показана смешанной штриховкой.

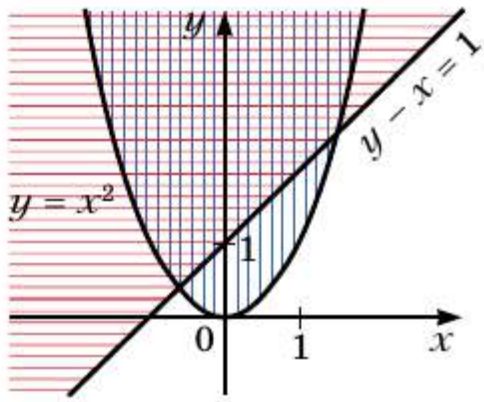


Рис. **16.1**

Также говорят, что система неравенств $\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1 \end{cases}$ задаёт построенную фигуру.

Например, система неравенств $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x \leqslant 0, \\ -x + y \leqslant 1 \end{cases}$ задаёт треугольник ABO (рис. 16.2).

Система неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}$ задаёт полукруг, изображённый на рисунке 16.3 жёлтым цветом.

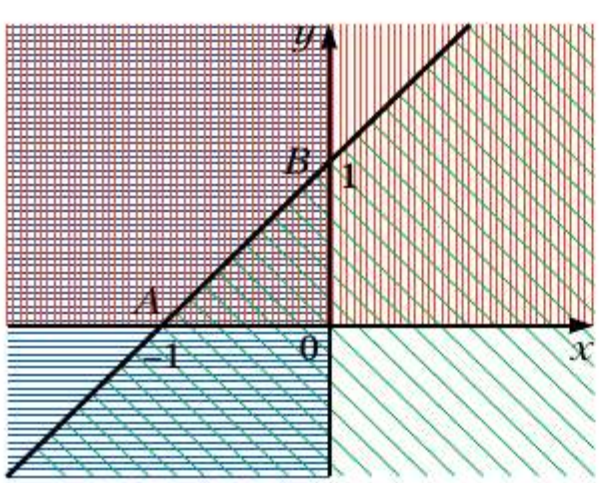


Рис. **16.2**

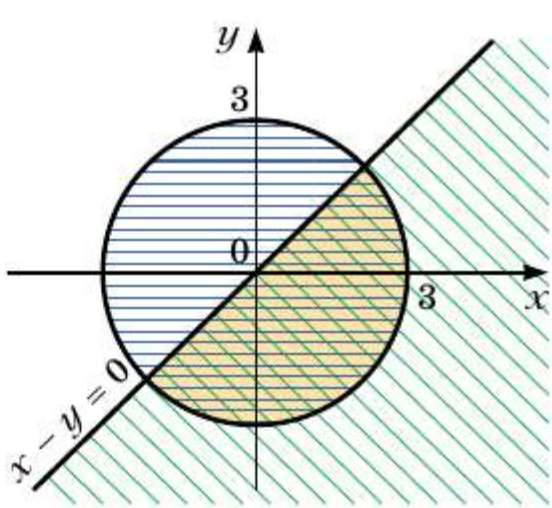


Рис. **16.3**

Пример 1. Изобразите график неравенства $y < \frac{6}{x}$.

Решение.

Способ 1. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ xy < 6,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ xy > 6.\end{cases}\end{array}\right.$

Для построения множеств решений систем совокупности можно воспользоваться примером 5 из § 15. На рисунке 16.4 жёлтым цветом изображено множество решений первой системы, а синим — множество решений второй системы.

График исходного неравенства — это объединение полученных фигур.

Способ 2. Исходное неравенство равносильно такому: $\frac{xy-6}{x} < 0$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $x(xy-6) < 0$. График уравнения $x(xy-6) = 0$ разбивает координатную плоскость xy на четыре области (рис. 16.5). Далее с помощью пробных точек выясните, какие из областей принадлежат графику неравенства. Завершите решение самостоятельно. ■

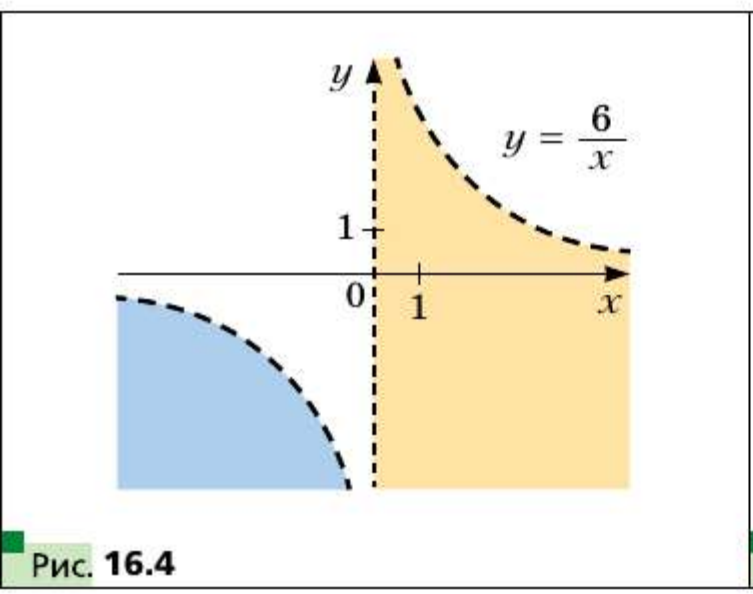


Рис. 16.4

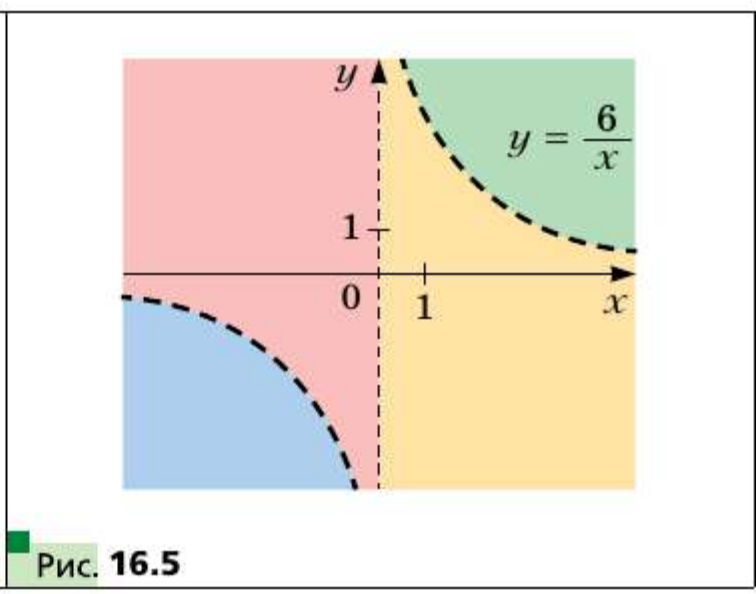


Рис. 16.5

Пример 2. Изобразите график неравенства $\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x+y) > 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases}x+y > 0,\\ 1-x^2-y^2 > 0.\end{cases}$

Графиком первого неравенства системы является открытая полуплоскость с границей $x + y = 0$, показанная на рисунке 16.6 вертикальной штриховкой; графиком второго — внутренняя область круга радиуса 1 с центром в начале координат.

Следовательно, графиком данного неравенства является открытый полукруг, показанный на рисунке 16.6 двойной штриховкой. ■

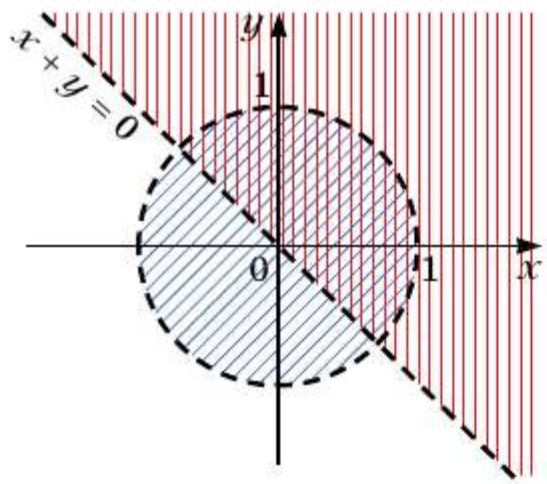


Рис. 16.6

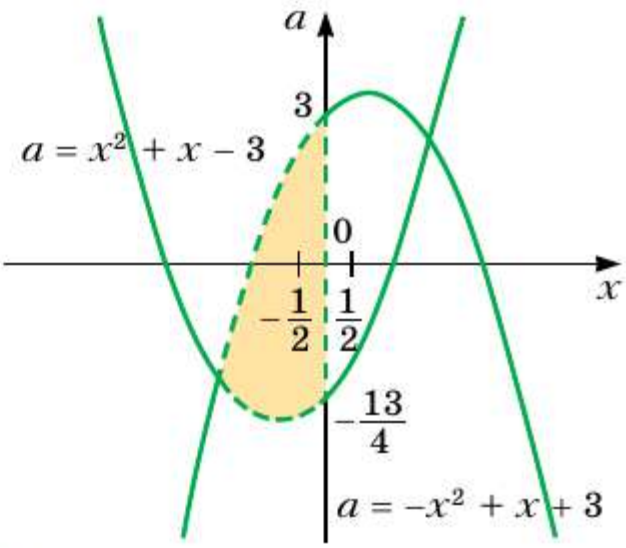


Рис. 16.7

Пример 3. При каких значениях параметра a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?

Решение. Запишем данное неравенство так:

$$|x - a| < 3 - x^2.$$

Это неравенство равносильно системе $\begin{cases} x - a < 3 - x^2, \\ x - a > -3 + x^2. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} a > x^2 + x - 3, \\ a < -x^2 + x + 3. \end{cases}$

Полученная система должна иметь хотя бы одно отрицательное решение. Поэтому задача сводится к тому, чтобы найти все значения параметра a, при которых имеет решение система $\begin{cases} a > x^2 + x - 3, \\ a < -x^2 + x + 3, \\ x < 0. \end{cases}$

На координатной плоскости xa изобразим решения последней системы.

Графиком первого неравенства системы является множество точек, лежащих выше параболы $a = x^2 + x - 3$, графиком второго неравенства — множество точек, лежащих ниже параболы $a = -x^2 + x + 3$, графиком третьего неравенства — открытая полуплоскость, расположенная слева от

оси ординат. Пересечение указанных множеств изображено на рисунке 16.7 жёлтым цветом.

Система имеет решения, если горизонтальные прямые пересекают построенную фигуру. Это пересечение обеспечивается условием $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Ответ: $-\frac{13}{4} < a < 3$. ■

1. Что нужно сделать, чтобы найти множество решений системы неравенств?

2. Как можно на координатной плоскости изобразить множество решений системы неравенств?

Упражнения

16.1. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 1, \\ x + 2y < 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + y \leqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - y > 1, \\ 2x - y < 2. \end{cases}$

16.2. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x + 3y > 1, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y + 3 \geqslant 2x, \\ 2x - y \geqslant -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - y > 2, \\ 6x - 2y < 1. \end{cases}$

16.3. Изобразите на координатной плоскости xy множество $C = A \cap B$, где:

1) $A = \{(x; y) \mid y \leqslant -x^2 + 1\}$, $B = \{(x; y) \mid y \geqslant -4\}$;

2) $A = \{(x; y) \mid y \geqslant x^2 - 4x + 3\}$, $B = \{(x; y) \mid y \leqslant -x^2 + 4x - 5\}$;

3) $A = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 4\}$, $B = \{(x; y) \mid y \leqslant x^2\}$.

16.4. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:

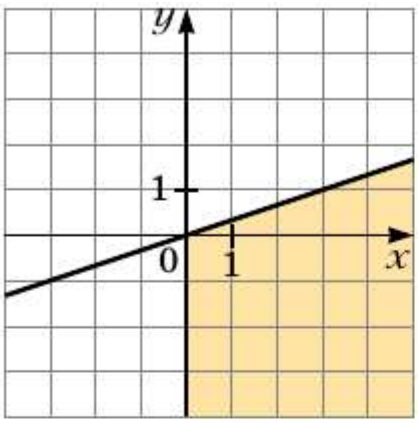
1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 5, \\ xy \geqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4, \\ (x - 3)^2 + y^2 < 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant -x^2 + 1, \\ y \geqslant |x| - 1. \end{cases}$

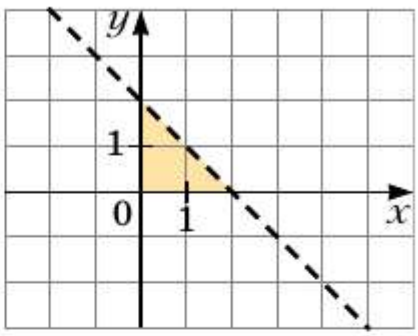
16.5. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ y \leqslant -|x|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ xy \geqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ xy \leqslant 0. \end{cases}$

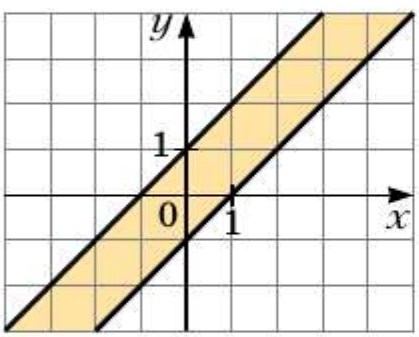
16.6. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 16.8.



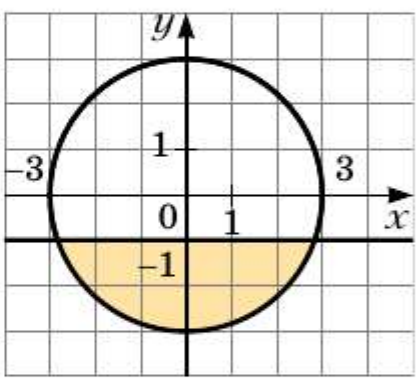
а



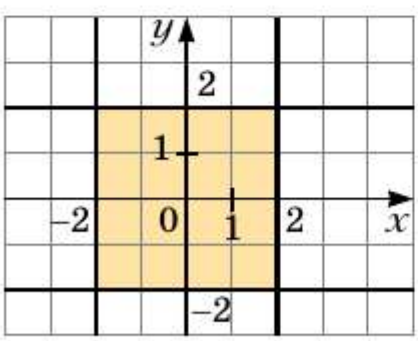
г



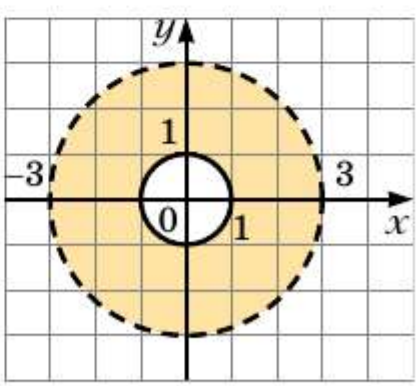
б



д

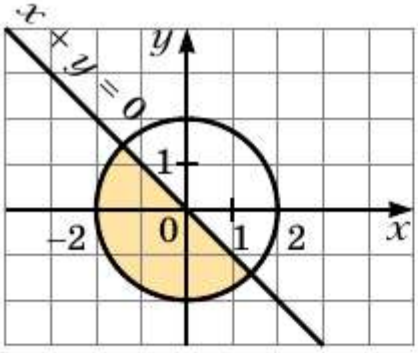


в

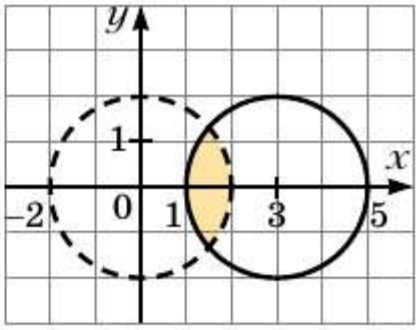


е

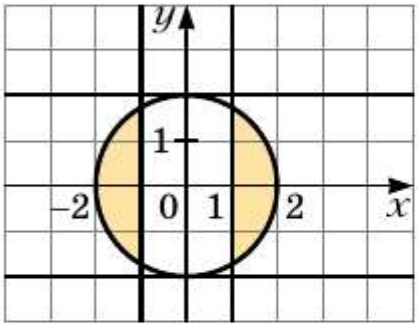
Рис. **16.8 (окончание на с. 161)**



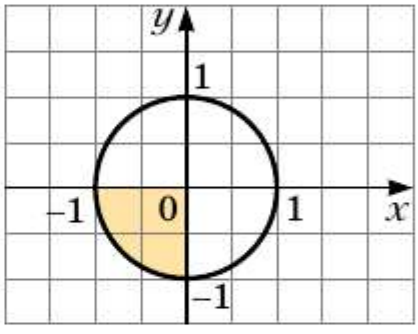
ж



и



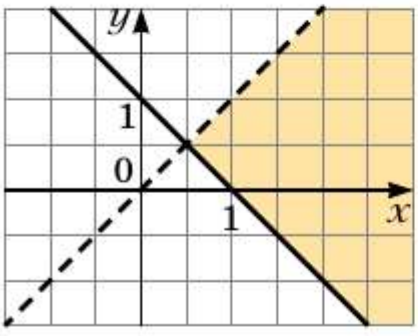
з



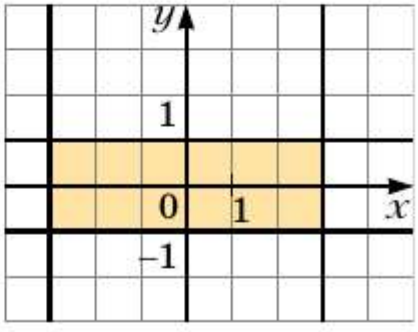
к

Рис. **16.8 (окончание)**

16.7. Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке 16.9.

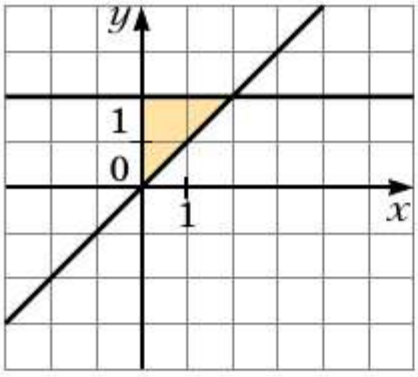


а

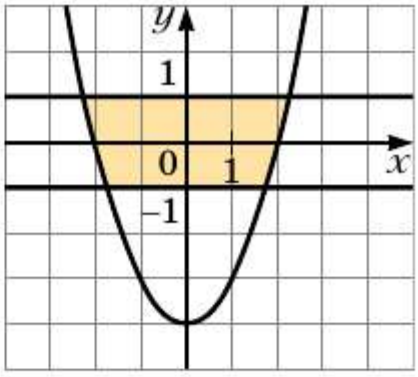


б

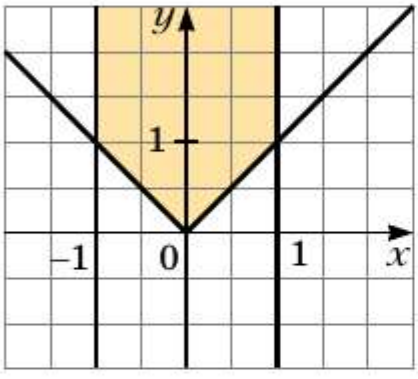
Рис. **16.9 (окончание на с. 162)**



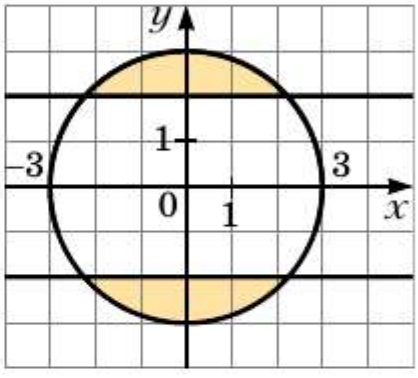
в



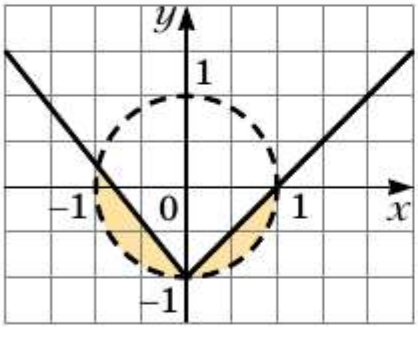
е



г



ж



д

Рис. **16.9 (окончание)**

16.8. Изобразите график неравенства:

1) $|x - y| \leqslant 2$;

2) $|x + y| \leqslant x - y$;

3) $|x - y| \geqslant 2x + y$;

4) $\sqrt{x - y} \leqslant 2$;

5) $\sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{2x - y + 1}$;

6) $\sqrt{2x + y} \geqslant \sqrt{x - y - 1}$.

16.9. Изобразите график неравенства:

1) $|2x - y| \leqslant 1$; 3) $|x + y| \geqslant x - y$;

2) $|2x - y| \leqslant x + y$; 4) $\sqrt{x - 2y - 1} \leqslant \sqrt{x - y}$.

16.10. Изобразите график неравенства:

1) $x > \frac{8}{y}$; 2) $y < -\frac{6}{x}$; 3) $y \geqslant \frac{12}{x}$; 4) $\frac{12}{xy} > 1$.

16.11. Изобразите график неравенства:

1) $y > -\frac{1}{x}$; 2) $x \leqslant -\frac{2}{y}$; 3) $\frac{6}{xy} \leqslant -1$.

16.12. Изобразите график неравенства:

1) $(x + y - 1)\sqrt{x^2 + y^2 - 1} < 0$; 2) $(x + y - 1)\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geqslant 0$.

16.13. Изобразите график неравенства:

1) $\sqrt{1 - |x|}(y - x^2) > 0$; 3) $(y + x + 2)\sqrt{x^2 + y^2 - 2} \leqslant 0$.

2) $\sqrt{1 - |x|}(y - x^2) \leqslant 0$;

16.14. Изобразите график неравенства $|x + y| + |x - y| \leqslant 2$.

16.15. Изобразите график неравенства $|2x - y| + |x + y| \leqslant 6$.

16.16. Изобразите график неравенства:

1) $|x^2 + y^2 - 4x| \leqslant 2x$; 2) $\sqrt{x^2 - 1} \leqslant \sqrt{2x + 1 - y^2}$.

16.17. Изобразите график неравенства:

1) $|x^2 - 1| \geqslant y^2 - 1$; 2) $|x^2 + y^2 - 2| \leqslant 2(x + y)$.

◆ ◆ ◆

16.18. Изобразите на координатной плоскости xy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

1) $\max\{2x, 1\} = x^2 + y^2$; 2) $\min\{y, 2y - 1\} = x^2$.

16.19. Изобразите на координатной плоскости xy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

1) $\max\{x^2 + y^2 - 1, 3\} = x^2$; 2) $\min\{x^2, |x|\} = y$.

16.20. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + a + 4x + 3 \leqslant 0, \\ 2a - x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

16.21. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 - 4x + a \leqslant 0, \\ x^2 + 2x - 3a \leqslant 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

16.22. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 2a < 0, \\ x + a^2 = 0 \end{cases}$$

имеет решения?

16.23. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

имеет решения?

16.24. При каких значениях параметра a неравенство $2 > |x + a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

16.25. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} |2x - a| + |x + a| \leqslant 6, \\ 2x^2 + x - 2a \geqslant 2 \end{cases}$$

имеет:

1) решения;
2) единственное решение;
3) только отрицательные решения;
4) только положительные решения;
5) только решения, удовлетворяющие условию $|x| \geqslant 1$;
6) множество решений, содержащих не более одного целого числа?

Упражнения для повторения

16.26. Найдите область определения функции $y = \dfrac{5}{\sqrt{4x - 12}} - \dfrac{7}{|x| - 4}$.

16.27. Решите уравнение $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$.

§ 17 Основные методы доказательства неравенств

Очевидно, что неравенства $a^2 \geqslant 0$, $-a^2 - 1 < 0$, $|a| + |b| \geqslant 0$, $(a - b)^4 \geqslant 0$ выполняются *при всех значениях входящих в них переменных*.

Неравенство $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ также выполняется при любых $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in \boldsymbol{R}$, хотя этот факт не настолько очевиден. В его справедливости следует убедиться.

В таких случаях говорят, что требуется **доказать неравенство** $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$.

Заметим, что задачи на доказательство неравенств не являются для вас новыми. Так, в примерах 7 и 8 из § 2 мы фактически доказывали неравенства.

Докажем неравенство $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$. Имеем:

$$x^2 - 8xy + 17y^2 = x^2 - 8xy + 16y^2 + y^2 = (x - 4y)^2 + y^2.$$

Выражение $(x - 4y)^2 + y^2$ принимает только неотрицательные значения. Следовательно, при любых $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in \boldsymbol{R}$ верно неравенство $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$.

Для доказательства неравенств используют различные приёмы. Например, неравенство $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ мы доказали, выделив квадрат двучлена. Рассмотрим ещё несколько приёмов доказательства неравенств.

Метод разности

Этот приём состоит в том, что рассматривают разность левой и правой частей неравенства и доказывают, что эта разность принимает значения постоянного знака при любых значениях переменных, входящих в неравенство.

Пример 1. Докажите неравенство $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 \geqslant 6ab$.

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства:

$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab = (a^2b^2 - 4ab + 4) + (a^2 - 2ab + b^2) = (ab - 2)^2 + (a - b)^2$.

При любых значениях a и b эта разность принимает только неотрицательные значения, следовательно, доказываемое неравенство верно. ■

Пример 2. Докажите, что если $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} - (a + 2b + c) = \left(\frac{a^2}{a-b} - (a+b)\right) + \left(\frac{b^2}{b-c} - (b+c)\right) = \frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c}.$$

Из условия $a > b > c$ следует, что $a - b > 0$, $b - c > 0$ и $b^2 + c^2 \neq 0$. Следовательно, $\frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c} > 0$, что доказывает данное неравенство. ■

Метод упрощения неравенства

В ряде случаев упрощение выражений, образующих неравенство, делает это неравенство очевидным.

Пример 3. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Доказываемое неравенство принимает вид $1-\frac{1}{n+1}<1$ и становится очевидным. ■

Метод рассуждения от противного

Пример 4. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{b}}.$$

Решение. Предположим, что доказываемое неравенство неверно, т. е. существуют такие значения a и b, при которых верно неравенство $\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{a}} < \sqrt{a+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{b}}$. Отсюда

$$(a+\sqrt{b})(b+\sqrt{a}) < (a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b});$$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b} < a\sqrt{b}+b\sqrt{a};$$

$$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}) < 0.$$

Последнее неравенство неверно, так как при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ разности $a-b$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ принимают значения одинакового знака или равны нулю. Полученное противоречие означает, что исходное неравенство верно. ■

Метод применения очевидного неравенства

Этот приём состоит в следующем: данное неравенство получают в результате преобразования очевидного неравенства либо почленного сложения или умножения нескольких очевидных неравенств.

Пример 5. Докажите неравенство:

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Решение. Очевидно, что при любых значениях a, b и c выполняется такое неравенство:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2 \geqslant 0$;

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca. \blacksquare$$

Пример 6. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Решение. Для неотрицательных значений a, b и c выполняются такие три очевидных неравенства:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

$$(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geqslant 0,$$

$$\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$b+c \geqslant 2\sqrt{bc},$$
$$c+a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Так как обе части каждого из этих неравенств принимают неотрицательные значения, то можно применить теорему о почленном умножении неравенств. Имеем:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Поскольку $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$.

Получаем, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$. ■

Пример 7. Докажите, что для любых $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Решение. Так как из двух обыкновенных дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше, то можно записать n очевидных неравенств:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n};$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n};$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Применяя теорему о почленном сложении неравенств, получим:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}}.$$ Поскольку

$$\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$ то $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$ ■

Метод применения ранее доказанного неравенства

Нередко ранее доказанное неравенство можно использовать для доказательства другого, более сложного неравенства. Например, легко доказать (убедитесь в этом самостоятельно), что $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Это неравенство часто применяется для доказательства других неравенств.

- **Применение неравенства $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$**

Пример 8. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leqslant \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a};$$

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} \leqslant \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b};$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{c+a}{2ca} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}.$$

Отсюда $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} =$

$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. ■

- **Применение неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$**

Пример 9. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$.

Решение. Имеем:

$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 +$

$+ (ca)^2 \geqslant (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) = ab^2c + bc^2a + ca^2b = abc(a + b + c)$. ■

? Назовите основные методы доказательства неравенств.

Упражнения

17.1. Докажите неравенство:

1) $(y + 5)(y - 2) \geqslant 3y - 10$;
2) $a(a - 2) \geqslant -1$.

17.2. Докажите неравенство:

1) $(2a - 5)^2 \leqslant 6a^2 - 20a + 25$;
2) $a^2 + 4 \geqslant 4a$.

17.3. Докажите неравенство:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
4) $9x^2 - 6xy + 5y^2 \geqslant 0$;
5) $a(a - 3) > 5(a - 4)$.

17.4. Докажите неравенство:

1) $28a - 32 \leqslant 7a^2 - 4$;
2) $16x^2 - 8xy + 2y^2 \geqslant 0$;
3) $3(b - 1) < b(b + 1)$.

17.5. Докажите, что:

1) если $a \geqslant 6$, то $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$;

2) если $a \geqslant b$, то $ab(b - a) \leqslant a^3 - b^3$.

17.6. Докажите, что если $x \geqslant 4$, то $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 \geqslant 0$.

17.7. Докажите неравенство $\dfrac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

17.8. Докажите, что если $a < b$, то $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

17.9. Докажите, что если $a < b < c$, то $a < \dfrac{a + b + c}{3} < c$.

17.10. Докажите неравенство:

1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geqslant 0$;

2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;

3) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geqslant 4(a + b + c)$;

4) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab$;

5) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$.

17.11. Докажите неравенство:

1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;

2) $x^2 + y^2 + 10 \geqslant 6x - 2y$;

3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geqslant 0$;

4) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a + b + c) - 3$.

17.12. Докажите, что если $a \in [0; 1]$, то $a \geqslant a^2$.

17.13. Докажите, что если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + b^2a$.

17.14. Докажите неравенство $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + b^3a$.

17.15. Докажите, что:

1) если $0 < a < b$, $k > 0$, то $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a + k}{b + k}$;

2) если $a \geqslant b > 0$, $k > 0$, то $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{a + k}{b + k}$.

◆ ◆

17.16. Докажите, что при любых значениях x, y и z хотя бы одно из выражений $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^2 + 2zx + y^2$ принимает неотрицательные значения.

17.17. Докажите, что:

1) если $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$;

2) если $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$.

17.18. Докажите, что:

1) $\dfrac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$, где $b > 0$;

2) $\dfrac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b$, где $a > 0$, $b > 0$.

17.19. Докажите, что если $x > 0$ и $y > 0$, то $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \geqslant \dfrac{x + y}{2}$.

17.20. Докажите неравенство $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^nb + b^na$, где n — нечётное натуральное число.

17.21. Для $a > 0$, $b > 0$ докажите неравенство $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^n b + b^n a$, где n — чётное натуральное число.

17.22. Докажите, что при $b > 0$ выполняется неравенство $\dfrac{a^3}{a^2 + b^2} \geqslant a - \dfrac{b}{2}$.

17.23. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ выполняется неравенство $\dfrac{a}{b + 2a} + \dfrac{b}{a + 2b} \leqslant \dfrac{2}{3}$.

17.24. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, то $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$.

17.25. Известно, что $x \in [0; 1]$ и $y \in [0; 1]$. Докажите, что $\dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{1}{1 + y^2} \leqslant \dfrac{2}{1 + xy}$.

17.26. Докажите неравенство $a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geqslant 0$.

17.27. Докажите неравенство $x^8 + x^6 - 2x^3 + x^2 + 1 > 0$.

17.28. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ и $d \geqslant 0$, то $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

17.29. Докажите, что при любых $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство:

1) $2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

17.30. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} > \dfrac{3}{a+b+c}$.

17.31. Докажите, что если $x \in [0; 1]$ и $y \in [0; 1]$, то $\dfrac{x}{1+y} + \dfrac{y}{1+x} \leqslant 1$.

17.32. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} > \dfrac{a+b}{1+a+b}$.

17.33. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} > 1$.

17.34. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a} < 2$.

17.35. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd$.

17.36. Докажите неравенство $(a^4b^4 + 36)(4a^4 + 9b^4) \geqslant 144a^4b^4$.

17.37. Докажите, что если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $a(1 + b^2) + b(1 + a^2) \geqslant 4ab$.

17.38. Докажите неравенство $x^4 + 4y^4 + 5 \geqslant 8xy$.

17.39. Докажите, что если $y \geqslant 0$, то $x^4 + 4y^3 + y + 2x^2 + 1 \geqslant 8xy$.

17.40. Докажите, что если $b \geqslant 0$, то $a^4 + b^3 + b + 1 \geqslant 4ab$.

17.41. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + b + a$.

17.42. Докажите неравенство $4a^2 + b^2 + 1 \geqslant 2ab + 2a + b$.

17.43. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

17.44. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

◆ ◆ ◆

17.45. Докажите неравенство $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geqslant \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

17.46. Докажите неравенство $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

17.47. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c$.

17.48. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите, что $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leqslant 3$.

17.49. Докажите, что при любых значениях a, b и c хотя бы одно из неравенств $a - b^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $b - c^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $c - a^2 \leqslant \frac{1}{4}$ верно.

17.50. Докажите, что при любых положительных значениях a, b и c хотя бы одно из неравенств $a(1 - b) \leqslant \frac{1}{4}$, $b(1 - c) \leqslant \frac{1}{4}$, $c(1 - a) \leqslant \frac{1}{4}$ верно.

17.51. Докажите, что если $x > 0$ и $y > 0$, то $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}$.

17.52. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2xz} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geqslant 1.$$

17.53. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, то

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{c^2 + a^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

17.54. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $ab + bc + ac \geqslant a + b + c$. Докажите, что $a + b + c \geqslant 3$.

17.55. Известно, что $a > 0$, $b > 0$ и $ab \geqslant a + b$. Докажите, что $a + b \geqslant 4$.

17.56. Докажите, что если $x \in [0; 1]$ и $y \in [0; 1]$, то $(x + y + 1)^2 \geqslant 4(x^2 + y^2)$.

17.57. Докажите неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

17.58. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $xyz = 1$, то

$$\frac{xy^2}{x^3 + 2} + \frac{yz^2}{y^3 + 2} + \frac{zx^2}{z^3 + 2} \geqslant 1.$$

17.59. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant (a + b + c + d)e$.

17.60. Докажите неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

17.61. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

17.62. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$.

17.63. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

17.64. Докажите неравенство $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}} < \frac{\sqrt{2n}}{2}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

Упражнения для повторения

17.65. Решите уравнение $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$.

17.66. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $x^2 - (a^2 - 5a)x + 5a - 1 = 0$ равна -6.

§ 18 Неравенства между средними величинами. Неравенство Коши — Буняковского

Значения выражений $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ называют соответственно **средним квадратичным, средним арифметическим, средним геометрическим, средним гармоническим** чисел a и b.

Эти величины называют средними, так как при $0 < a \leqslant b$ их значения принадлежат промежутку $[a; b]$, т. е. выполняются неравенства:

$$a \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leqslant b,\ a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b,\ a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b,\ a \leqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant b.$$

Докажите эти неравенства самостоятельно.

Связь между средними величинами выражают такие три теоремы.

Теорема 18.1

При любых значениях a и b выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}. \qquad (1)$$

Доказательство

Имеем:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab;$$
$$2a^2+2b^2 \geqslant 2ab+a^2+b^2;$$
$$2a^2+2b^2 \geqslant (a+b)^2;$$
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4};$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}};$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{|a+b|}{2}.$$

Поскольку $|a+b| \geqslant a+b$, то $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$. ■

Заметим, что в неравенстве (1) равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b$ и $a \geqslant 0$. Докажите этот факт самостоятельно.

Теорема 18.2

(неравенство Коши для двух чисел)

При любых неотрицательных значениях a и b выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad (2)$$

Доказательство

Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

При любых неотрицательных значениях a и b эта разность принимает неотрицательные значения. Следовательно, доказываемое неравенство верно. ■

Заметим, что в неравенстве (2) равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b$ и $a \geqslant 0$. Докажите этот факт самостоятельно.

Следствие

Если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Доказательство

К положительным числам a и $\frac{1}{a}$ применим неравенство Коши:

$$\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1. \text{ Отсюда } a + \frac{1}{a} \geqslant 2. \blacksquare$$

Заметим, что в неравенстве $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = \frac{1}{a}$. С учётом того, что $a > 0$, получаем $a = 1$.

При решении целого ряда задач в предыдущем параграфе, а также при доказательстве теоремы 18.1 мы использовали неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Это неравенство также можно рассматривать как следствие из неравенства Коши. Действительно, поскольку $a^2 \geqslant 0$ и $b^2 \geqslant 0$, то можно записать:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2 b^2}. \text{ Отсюда } a^2 + b^2 \geqslant 2\sqrt{a^2 b^2} = 2|ab| \geqslant 2ab.$$

Теорема 18.3

Если $ab > 0$, то

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \qquad (3)$$

Доказательство

Если $a < 0$ и $b < 0$, то $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < 0$ и $\sqrt{ab} > 0$. В этом случае доказываемое неравенство становится очевидным.

Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Применим неравенство Коши к положительным числам $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Так как обе части этого неравенства при $a > 0$ и $b > 0$ принимают положительные значения, то справедливо такое неравенство:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}. \blacksquare$$

Заметим, что в неравенстве (3) равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b$ и $a > 0$. Докажите этот факт самостоятельно.

Теоремы 18.1–18.3 позволяют сделать вывод, что при $a > 0$ и $b > 0$ справедлива такая цепочка неравенств:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Проиллюстрируем применение теорем 18.1–18.3 на примерах.

Пример 1. Докажите неравенство $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \geqslant \sqrt{2}$.

Решение. Воспользовавшись неравенством (1), можно записать:

$$\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + (1 - y)^2}{2}} \geqslant \sqrt{2} \cdot \frac{x + 1 - y}{2};$$

$$\sqrt{(1 - x)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 - x)^2 + y^2}{2}} \geqslant \sqrt{2} \cdot \frac{1 - x + y}{2}.$$

Применив теорему о почленном сложении неравенств, получаем:

$$\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} \geqslant \sqrt{2}\left(\frac{x + 1 - y}{2} + \frac{1 - x + y}{2}\right) = \sqrt{2}. \blacksquare$$

Пример 2. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geqslant 4$.

Решение. Применяя неравенство Коши, можно записать:

$$\frac{a + \frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \frac{b + \frac{1}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Отсюда $a + \frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$, $b + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Применив теорему о почленном умножении неравенств, получаем:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = 4. \blacksquare$$

Пример 3. Найдите наибольшее значение выражения ab, если известно, что $a > 0$, $b > 0$ и $2a + b = 3$.

Решение. Имеем: $\frac{3}{2} = \frac{2a + b}{2} \geqslant \sqrt{2ab}$. Отсюда $\sqrt{2ab} \leqslant \frac{3}{2}$; $ab \leqslant \frac{9}{8}$.

Последнее неравенство ещё не позволяет сделать вывод, что наибольшее значение выражения ab равно $\frac{9}{8}$. Необходимо также показать, что существуют такие значения a и b, при которых $ab = \frac{9}{8}$.

В записанном неравенстве Коши для чисел $2a$ и b равенство достигается только тогда, когда $2a = b$. Теперь нужные значения a и b можно найти, решив систему

$$\begin{cases} 2a = b, \\ 2a + b = 3. \end{cases}$$

Отсюда $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{2}$.

Следовательно, наибольшее значение выражения ab равно $\frac{9}{8}$. ■

Пример 4. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Докажите неравенство $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

Решение. Введём обозначения: $b + c = 2x$, $c + a = 2y$, $a + b = 2z$.
Отсюда $a + b + c = x + y + z$, $a = y + z - x$, $b = x + z - y$, $c = x + y - z$.

Имеем: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) - \frac{3}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

Пример 5. Докажите, что если $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}$, то $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \geqslant 3$.

Решение. Запишем неравенство (3) в таком виде: $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$.

Имеем: $\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1) \cdot 1} \geqslant \frac{2(x-1) \cdot 1}{x-1+1} = \frac{2x-2}{x} = 2 - \frac{2}{x}$.

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$\sqrt{y-1} \geqslant 2 - \frac{2}{y},$$

$$\sqrt{z-1} \geqslant 2 - \frac{2}{z}.$$

Тогда $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \geqslant 6-\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right)=6-2\cdot\frac{3}{2}=3$. ■

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма

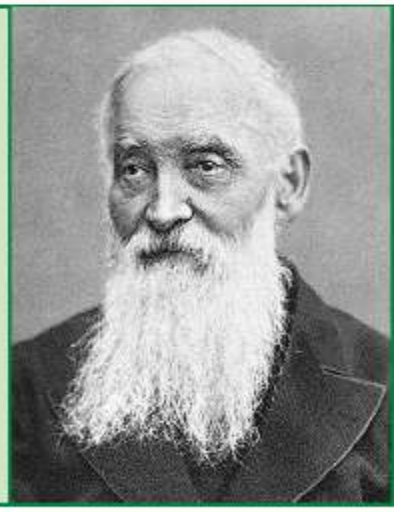
Если квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, где $a>0$, при всех значениях x принимает неотрицательные значения, то его дискриминант D неположителен.

Воспользовавшись таблицей на с. 81, докажите эту лемму самостоятельно.

Огюстен Луи Коши (1789–1857)

Выдающийся французский математик. Опубликовал более 800 работ в области арифметики, теории чисел, алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, теоретической и небесной механики, математической физики. Занимался также исследованиями в области тригонометрии, теории упругости, оптики, астрономии. Был членом Парижской академии наук, Лондонского королевского общества и почти всех академий наук мира.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889)



Выдающийся отечественный математик XIX в. В течение многих лет был вице-президентом Петербургской академии наук.

Теорема 18.4

(неравенство Коши — Буняковского)

При любых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство $\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2 \leqslant \left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)$.

Доказательство

Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то доказываемое неравенство очевидно.

Рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не равно 0.

При любом значении переменной x выполняется неравенство

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 \geqslant 0.$$

Это неравенство можно привести к такому виду:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \geqslant 0.$$

Левая часть последнего неравенства — это квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом. Этот квадратный трёхчлен принимает неотрицательные значения при любых значениях переменной x. Тогда согласно лемме его дискриминант D неположителен.

Имеем:

$$D = 4\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Так как $D \leqslant 0$, то

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \blacksquare$$

Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то равенство в неравенстве Коши — Буняковского достигается при любых значениях $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не равно 0.

Покажем, что в этом случае в неравенстве Коши — Буняковского равенство достигается тогда и только тогда, когда существует такое число k, что выполняются равенства

$$b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2,\ \ldots,\ b_n = ka_n. \qquad (4)$$

Легко показать (сделайте это самостоятельно), что если выполняется условие (4), то неравенство Коши — Буняковского превращается в равенство.

Докажем обратное утверждение. Пусть

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Это означает, что квадратное уравнение

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 0$$

имеет единственный корень. Пусть этот корень равен k. Тогда число k является корнем уравнения

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 = 0.$$

Следовательно, выполняются равенства

$$a_1k = b_1,\ a_2k = b_2,\ \ldots,\ a_nk = b_n.$$

О неравенстве

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

будем говорить, что неравенство Коши — Буняковского применено к *наборам* чисел $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $(b_1; b_2; \ldots; b_n)$.

Пример 6. Докажите неравенство

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Решение. Применяя неравенство Коши — Буняковского к наборам чисел $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $(1; 1; \ldots; 1)$, запишем:

$$(a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)(\underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{n \text{ слагаемых}}) = n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Отсюда $\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$. ■

Из доказанного неравенства можно получить такое неравенство:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Выражения, записанные в левой и правой частях этого неравенства, называют соответственно **средним квадратичным** и **средним арифметическим** чисел a_1, a_2, ..., a_n. Это неравенство является обобщением неравенства (1).

Пример 7. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant (a + b + c)^2.$$

Решение. К наборам чисел $\left(a\sqrt{a}; b\sqrt{b}; c\sqrt{c}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{b}}; \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ приме́ним неравенство Коши — Буняковского:

$$\left((a\sqrt{a})^2 + (b\sqrt{b})^2 + (c\sqrt{c})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right) \geqslant \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right)^2.$$

Отсюда $(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant (a + b + c)^2$. ■

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt{3x} + \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 2|x - 1|$.

Решение. Запишем левую часть уравнения так:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 1}.$$

К наборам чисел $\left(\sqrt{3}; 1\right)$ и $\left(\sqrt{x}; \sqrt{x^2 - 3x + 1}\right)$ приме́ним неравенство Коши — Буняковского:

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 \leqslant \left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2\right).$$

Отсюда $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 \leqslant 4(x^2-2x+1)$;

$$\left|\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right| \leqslant 2|x-1|;$$

$$\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1} \leqslant 2|x-1|.$$

В этом неравенстве равенство достигается тогда и только тогда, когда существует такое число k, что

$$\begin{cases}\sqrt{3}=k\sqrt{x},\\ 1=k\sqrt{x^2-3x+1},\end{cases} \text{ т. е. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{1}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному.

Имеем: $\begin{cases}\frac{x}{3}=x^2-3x+1,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2-10x+3=0,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$

Ответ: $3;\ \frac{1}{3}$. ■

1. Значения каких выражений называют средним квадратичным, средним арифметическим, средним геометрическим, средним гармоническим двух положительных чисел a и b?

2. Какие неравенства выражают связь между средними величинами?

3. Запишите неравенство Коши — Буняковского для наборов чисел $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $(b_1; b_2; \ldots; b_n)$.

4. При каких условиях в неравенстве Коши — Буняковского достигается равенство?

Упражнения

18.1. Для положительных чисел a и b докажите неравенство

$$\frac{a}{16b}+\frac{25b}{a}\geqslant\frac{5}{2}.$$

18.2. Для положительных чисел x и y докажите неравенство

$$\frac{3x}{y}+\frac{y}{27x}\geqslant\frac{2}{3}.$$

18.3. Докажите неравенство $(x+y)(xy+16)\geqslant 16xy$, где $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

18.4. Докажите, что если $a>0$ и $b>0$, то $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

18.5. Докажите, что если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, то $(a^3+b)(b^3+a)\geqslant 4a^2b^2$.

18.6. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\left(a^2 + \frac{1}{bc}\right)\left(b^2 + \frac{1}{ca}\right)\left(c^2 + \frac{1}{ab}\right) \geqslant 8.$$

18.7. Докажите, что если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то $(x + 1)(y + 1)(xy + 1) \geqslant 8xy$.

18.8. Докажите неравенство $\dfrac{a^2 + 4}{2} \geqslant \sqrt{a^2 + 3}$.

18.9. Докажите неравенство $\dfrac{x^2 + 6}{4} \geqslant \sqrt{x^2 + 2}$.

18.10. Докажите неравенство $\dfrac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geqslant 2$.

18.11. При $a > 0$ докажите неравенство $2\left(a + \dfrac{1}{a}\right) + a^2 \geqslant 4a$.

18.12. Докажите неравенство $x^2 + \dfrac{1}{x^2 + 1} \geqslant 1$.

18.13. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + \dfrac{1}{a^2 + 2} + \dfrac{1}{b^2 + 1} > 1$.

18.14. Известно, что $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что $|ac + bd| \leqslant 1$.

18.15. Известно, что $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что $|ac - bd| \leqslant 1$.

18.16. Докажите неравенство $\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2} \geqslant |1 + ab|$.

18.17. Дано: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$-1 \leqslant ax + by + cz \leqslant 1.$$

18.18. Дано: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите, что

$$-\sqrt{3} \leqslant ax + by + cz \leqslant \sqrt{3}.$$

18.19. Переменные x и y принимают положительные значения, и их произведение постоянно. Докажите, что их сумма будет наименьшей тогда и только тогда, когда эти числа равны.

18.20. Переменные x и y принимают положительные значения, и их сумма постоянна. Докажите, что их произведение будет наибольшим тогда и только тогда, когда эти числа равны.

18.21. Известно, что $x > 0$ и $xy = 12$. Найдите наименьшее значение выражения $x + 3y$.

18.22. Найдите наименьшее значение выражения $5a + 2b$, если $a > 0$ и $ab = 10$.

18.23. Найдите наибольшее значение выражения xy, если $x > 0$, $y > 0$ и $x + 3y = 6$.

18.24. Известно, что $a > 0$, $b > 0$ и $3a + 4b = 24$. Найдите наибольшее значение выражения ab.

18.25. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + \dfrac{16}{x^2}$.

18.26. Известно, что $x > 0$. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{x^2 + 10x + 16}{x}$.

18.27. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{9x^2 + 1}$, если $x > 0$.

18.28. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{4x^2 + 3x + 1}$.

18.29. Известно, что $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Докажите неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

18.30. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\dfrac{b + c}{a} + \dfrac{c + a}{b} + \dfrac{a + b}{c} \geqslant 6$.

18.31. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a} \geqslant 4$.

18.32. Для положительных чисел a и b докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} \geqslant 4.$$

18.33. Для положительных чисел a и b докажите неравенство

$$\frac{(a + 1)^2}{b} + \frac{(b + 1)^2}{a} \geqslant 8.$$

18.34. Известно, что $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $a + b \geqslant \dfrac{1}{2}$. Докажите неравенство $\sqrt{(1 - a)(1 - b)} \leqslant \dfrac{3}{4}$.

18.35. Известно, что $|a| \leqslant 1$ и $|b| \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} \leqslant 1.$$

18.36. Известно, что $a + b = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant \dfrac{1}{2}$.

18.37. Известно, что $a + b = 2$. Докажите, что $a^4 + b^4 \geqslant 2$.

18.38. Докажите, что если $a^4 + b^4 = 2$, то $|a + b| \leqslant 2$.

18.39. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите неравенство $\dfrac{ab}{a + b} + \dfrac{bc}{b + c} + \dfrac{ca}{c + a} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

18.40. Докажите, что $\left|a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}\right| \leqslant 1$.

18.41. Докажите, что если $x + y + z = 1$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$.

18.42. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Докажите, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n.$$

18.43. Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $|a + b + c| \leqslant \sqrt{3}$.

18.44. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3x + 4y$, если $x^2 + y^2 = 1$.

18.45. Найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2$, если

$$5a - 12b = 13.$$

18.46. Докажите неравенство $(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant (a + b + c)^2$.

18.47. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$.

18.48. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

◆ ◆ ◆

18.49. Докажите неравенство

$$(a + c)(b + d) \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{c^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + d^2}.$$

18.50. Докажите, что если $a + b + c = 3$, то $\sqrt{3a + 1} + \sqrt{3b + 1} + \sqrt{3c + 1} \leqslant 6$.

18.51. Докажите неравенство $\sqrt{2a + 5} + \sqrt{a - 3} + \sqrt{25 - 3a} < 9$.

18.52. Решите уравнение $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 6x + 11$.

18.53. Решите уравнение $\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} = x^2 + 2$.

18.54. Решите уравнение $2\sqrt{x - 1} + 5x = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 24)}$.

18.55. Докажите, что если $x^2 + y^2 + z^2 = 44$, то $|3x - y + z| \leqslant 22$.

18.56. Известно, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Докажите неравенство

$$|2x + y - z| \leqslant 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

18.57. Докажите, что если $a > 1$ и $b > 1$, то $\frac{a}{\sqrt{b - 1}} + \frac{b}{\sqrt{a - 1}} \geqslant 4$.

18.58. Докажите, что если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $(a + b)\sqrt{\frac{a + b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

18.59. Известно, что $a > 0$, $b > 0$ и $a + b = 1$. Докажите, что

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

18.60. Докажите, что если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} \geqslant 2\sqrt{a + b}$.

18.61. Докажите неравенство

$$\sqrt{(a + b - 1)^2 + 2c^2} + \sqrt{(b + c - 1)^2 + 2a^2} + \sqrt{(c + a - 1)^2 + 2b^2} \geqslant \sqrt{3}.$$

18.62. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно отметили точки M, N, P и Q. Докажите, что периметр четырёхугольника $MNPQ$ не меньше суммы диагоналей квадрата.

18.63. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a + b + c = 1$, то

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geqslant 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

18.64. Известно, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \geqslant \frac{1}{2}(x + y + z).$$

18.65. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a + b + c + d}.$$

18.66. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b + c}} + \sqrt{\frac{b}{c + a}} + \sqrt{\frac{c}{a + b}} > 2.$$

Упражнения для повторения

18.67. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sqrt{x} - a\right)(4x - 9) = 0$ имеет единственное решение?

18.68. Докажите, что при любом натуральном значении n дробь $\dfrac{12n + 1}{30n + 2}$ является несократимой.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Эффективные приёмы доказательства неравенств

Материал двух предыдущих параграфов показывает, что наиболее эффективным методом доказательства неравенств является применение ранее доказанного неравенства.

Если с помощью некоторого неравенства можно доказать целый ряд других, более сложных неравенств, то такое неравенство будем называть **ключевым**. Так, неравенства $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$, неравенства между средними величинами, неравенство Коши — Буняковского, безусловно, можно отнести к ключевым неравенствам.

В этом разделе вы познакомитесь ещё с несколькими ключевыми неравенствами.

В задаче 17.18 вы доказали неравенство

$$\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b, \text{ где } b > 0 \qquad (1)$$

Заметим, что в неравенстве (1) равенство достигается только при $a = b$.

Покажем, как можно применять неравенство (1) для доказательства других неравенств.

Пример 1 (пример 2, § 17). Докажите, что если $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$$

Решение. Из условия следует, что $a - b > 0$ и $b - c > 0$. Тогда

$$\frac{a^2}{a-b} \geqslant 2a - (a-b) = a + b,$$

$$\frac{b^2}{b-c} \geqslant 2b - (b-c) = b + c.$$

Заметим, что равенства $a = a - b$ и $b = b - c$ выполняются одновременно только при условии $b = c = 0$. Поэтому в записанных неравенствах равенство одновременно достигаться не может.

Отсюда $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + b + b + c = a + 2b + c$. ■

Пример 2. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{a^4}{bc} = \frac{(a^2)^2}{bc} \geqslant 2a^2 - bc,$$

$$\frac{b^4}{ac} = \frac{(b^2)^2}{ac} \geqslant 2b^2 - ac,$$

$$\frac{c^4}{ab} = \frac{(c^2)^2}{ab} \geqslant 2c^2 - ab.$$

Отсюда $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca =$

$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. ■

Пример 3. Известно, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Докажите неравенство[1]:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x + y + z).$$

[1] В указании к задаче 18.64 было показано, как можно доказать рассматриваемое неравенство с помощью неравенства Коши — Буняковского или неравенства Коши.

Решение. Если неравенство (1) применить для каждой из трёх дробей, стоящих в левой части данного неравенства, то получим:

$$\frac{x^2}{y+z} \geqslant 2x - y - z,$$

$$\frac{y^2}{z+x} \geqslant 2y - z - x,$$

$$\frac{z^2}{x+y} \geqslant 2z - x - y.$$

Отсюда $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant 2x - y - z + 2y - z - x + 2z - x - y = 0$.

Но для такого результата не требуется применение каких-либо ключевых задач: неравенство $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant 0$ является очевидным.

Однако это не означает, что неравенство (1) не применимо к данному примеру.

Имеем: $\frac{x^2}{y+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x)^2}{y+z}$. Теперь к дроби $\frac{(2x)^2}{y+z}$ применим неравенство (1): $\frac{1}{4} \cdot \frac{(2x)^2}{y+z} \geqslant \frac{1}{4}(4x - y - z)$.

Аналогично можно показать, что

$$\frac{y^2}{z+x} \geqslant \frac{1}{4}(4y - z - x), \quad \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{4}(4z - x - y).$$

Теперь с помощью теоремы о почленном сложении неравенств получаем $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{4}(4x - y - z) + \frac{1}{4}(4z - x - y)$. Отсюда $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x + y + z)$. ■

Неравенство (1) можно обобщить. На самом деле справедливо такое неравенство:

$(n-k)\frac{a^n}{b^k} \geqslant na^{n-k} - kb^{n-k}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant k$, $a > 0$, $b > 0$.

Частный случай этого неравенства, когда $n = k + 1$, а именно неравенство

$$\boxed{\frac{a^{k+1}}{b^k} \geqslant (k+1)a - kb, \text{ где } k \in \boldsymbol{N},\ a > 0 \text{ и } b > 0} \qquad (2)$$

вы можете доказать методом математической индукции.

Отметим, что в задаче 17.18 вы доказали это неравенство для $n = 2$:

$$\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b, \text{ где } a > 0 \text{ и } b > 0$$

Пример 4. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geqslant -a + 2b + 2c.$$

Решение. Применив неравенство (2), запишем:

$$\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b,$$

$$\frac{b^3}{c^2} \geqslant 3b - 2c,$$

$$\frac{c^4}{a^3} \geqslant 4c - 3a.$$

Осталось применить теорему о почленном сложении неравенств. ■

В задаче 17.24 вы доказали такое неравенство:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}, \text{ где } x > 0, y > 0$$

Применяя это неравенство, докажем неравенство:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \text{ где } x > 0, y > 0, z > 0 \qquad (3)$$

Имеем: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Неравенство (3) является ключом к решению целого ряда непростых задач. Рассмотрим примеры его применения.

В первую очередь покажем, как, используя неравенство (3), можно доказать уже известное вам (см. задачу 18.64) неравенство.

Пример 5. Известно, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Докажите неравенство:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Решение. Имеем: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{y+z+z+x+x+y}=$

$=\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{1}{2}(x+y+z).$ ■

Пример 6. Докажите, что если $a>0$, $b>0$ и $c>0$, то

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\geqslant 1.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}=\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ca+a^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1.$$ ■

Пример 7. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство:

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\geqslant\frac{9}{x+y+z}.$$

Решение. Имеем: $\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}=2\left(\frac{1^2}{x+y}+\frac{1^2}{y+z}+\frac{1^2}{z+x}\right)\geqslant$

$$\geqslant 2\cdot\frac{(1+1+1)^2}{x+y+y+z+z+x}=\frac{9}{x+y+z}.$$ ■

Приведённые ниже задачи вы сможете решить с помощью ключевых задач § 17 и примеров, рассмотренных в данном разделе.

Упражнения

1. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

2. Докажите, что если $x>0$, $y>0$, $z>0$, то

$$\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2xz}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\geqslant 1.$$

3. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\geqslant a+b+c$.

4. Для положительных чисел x, y и z докажите неравенство:

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\geqslant x^2+y^2+z^2.$$

5. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Докажите неравенство:

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

6. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

7. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $d > 0$. Докажите неравенство:

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3}.$$

8. Дано: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}.$$

9. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geqslant \frac{1}{2}.$$

10. *(См. пример 4 в § 18)* Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

11. Известно, что $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Докажите неравенство:

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant \sqrt{8(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

12. Известно, что $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Докажите неравенство:

$$\frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \leqslant 1.$$

13. Известно, что $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+x+yz} + \frac{1}{1+y+xz} + \frac{1}{1+z+xy} \leqslant \frac{3}{x+y+z}.$$

14. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

15. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$, то:

$$a(b^3+c^3) + b(c^3+a^3) + c(a^3+b^3) \geqslant 2abc.$$

16. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $abc = 1$, то:

$$\frac{1}{a(b^3+c^3)} + \frac{1}{b(c^3+a^3)} + \frac{1}{c(a^3+b^3)} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

17. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство:

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+a^2} \geqslant a+b+c.$$

18. Докажите неравенство $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

19. Известно, что $x\in[0;1]$, $y\in[0;1]$, $z\in[0;1]$. Докажите, что:

$$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx}\geqslant\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}.$$

20. Докажите неравенство $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, где $n\in N$.

21. Докажите неравенство $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$, где $n\in N$.

Итоги главы 3

Решение неравенства с двумя переменными

Пару значений переменных, обращающую неравенство с двумя переменными в правильное числовое неравенство, называют решением неравенства с двумя переменными.

График неравенства с двумя переменными

Графиком неравенства с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного неравенства.

Линейное неравенство с двумя переменными

Линейными неравенствами с двумя переменными называют неравенства вида $ax + by > c$, $ax + by < c$, $ax + by \geqslant c$, $ax + by \leqslant c$, где x и y — переменные, a, b и c — параметры.

Решение системы неравенств

Чтобы найти множество решений системы неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, входящих в систему.

Основные методы доказательства неравенств

Метод разности, метод упрощения неравенства, метод рассуждения от противного, метод применения очевидного неравенства, метод применения ранее доказанного неравенства.

глава

4 Степенная функция

- В этой главе вы узнаете, какую функцию называют степенной функцией с натуральным показателем, какими свойствами обладает эта функция, что называют корнем n-й степени, какими свойствами обладает корень n-й степени, что называют степенью с рациональным показателем и каковы её свойства.
- Вы научитесь извлекать корни n-й степени, выполнять возведение в степень с рациональным показателем, преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональными показателями и корни n-й степени.

§ 19 Степенная функция с натуральным показателем

Свойства и графики функций $y = x$ и $y = x^2$ хорошо знакомы вам из предыдущих классов. Эти функции являются частными случаями функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, которую называют **степенной функцией с натуральным показателем**.

Поскольку выражение x^n, $n \in \boldsymbol{N}$, имеет смысл при любом x, то *областью определения степенной функции с натуральным показателем является множество* $\boldsymbol{R}$.

Очевидно, что рассматриваемая *функция имеет единственный нуль* $x = 0$.

Дальнейшее исследование свойств функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, проведём для двух случаев: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

- **Первый случай: $\boldsymbol{n = 2k}$, $\boldsymbol{k \in N}$.**

Отметим, что при $k = 1$ получаем функцию $y = x^2$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 8 класса.

Поскольку при любом x выражение x^{2k} принимает только неотрицательные значения, то область значений рассматриваемой функции не содержит ни одного отрицательного числа.

Можно показать, что для любого $a \geqslant 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{2k} = a$.

↳ Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^n$, *где* n *— чётное натуральное число, является множество* $[0; +\infty)$.

Если $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

↳ Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^n$, *где* n — *чётное натуральное число*.

↳ *Функция* $y = x^n$, *где* n — *чётное натуральное число, является чётной*. Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Отсюда $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

↳ Следовательно, *функция* $y = x^n$, *где* n — *чётное натуральное число, убывает на промежутке* $(-\infty; 0]$. Аналогично можно показать, что эта функция *возрастает на промежутке* $[0; +\infty)$.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число (рис. 19.1). В частности, график функции $y = x^4$ изображён на рисунке 19.2.

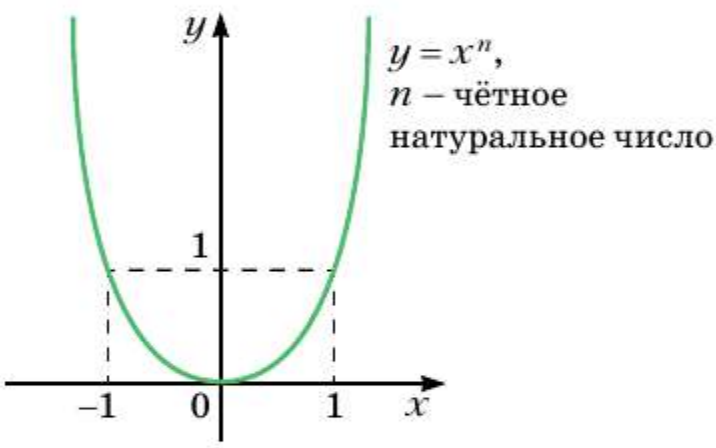


Рис. **19.1**

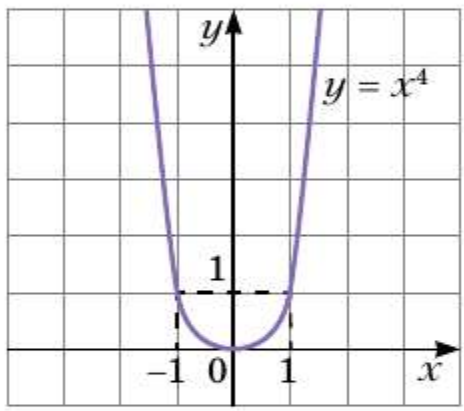


Рис. **19.2**

- **Второй случай: $n = 2k + 1$, $k \in N$ или $k = 0$.**

Отметим, что при $k = 0$ получаем функцию $y = x$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 7 класса.

Теперь пусть $k \in N$.

Можно показать, что для любого a существует такое значение аргумента x, что $x^{2k+1} = a$.

↳ Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^n$, *где* n — *нечётное натуральное число, является множество* R.

Если $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; если $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

↳ Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^n$, *где* n — *нечётное натуральное число*.

↳ *Функция $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, является нечётной.* Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

↳ Следовательно, *функция $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, является возрастающей.*

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, $n > 1$ (рис. 19.3). В частности, графики функции $y = x^3$ и $y = x^5$ изображены на рисунке 19.4.

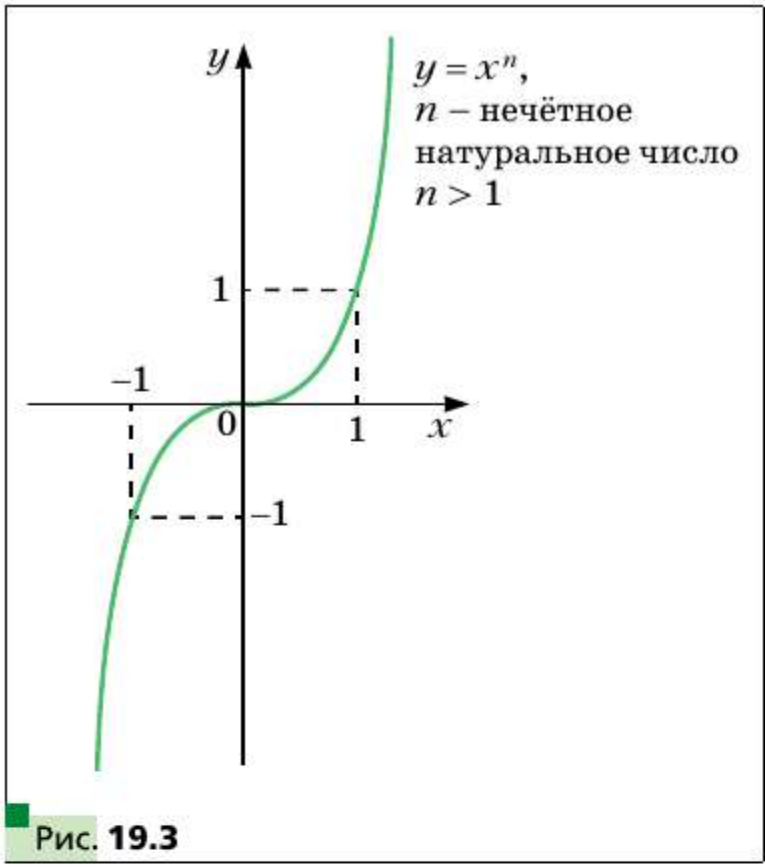
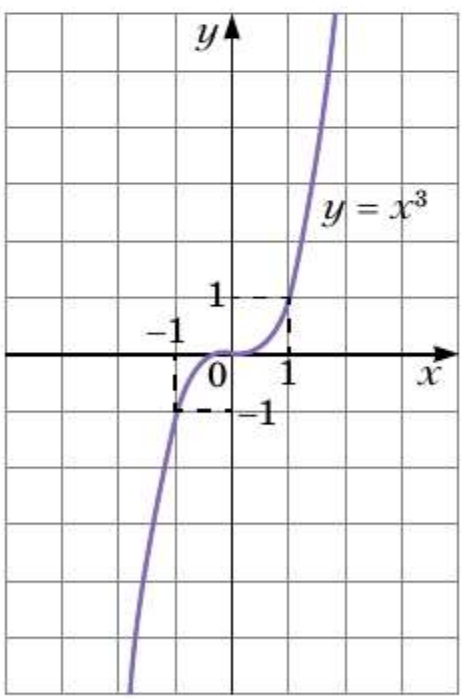


Рис. **19.3**



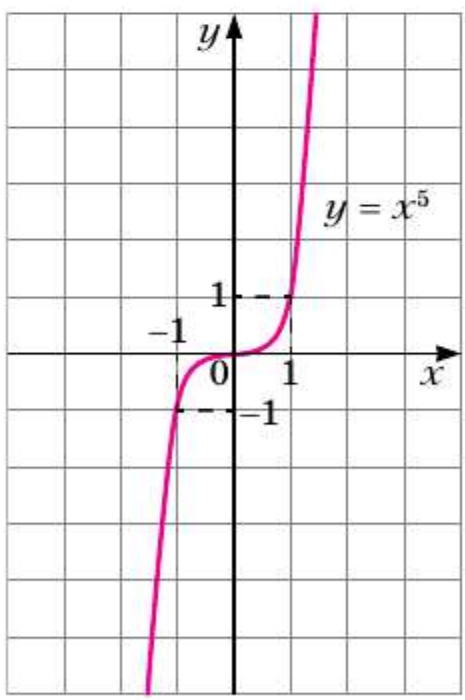


Рис. **19.4**

В таблице приведены свойства функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, установленные в этом параграфе.

	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Чётность	Чётная	Нечётная
Возрастание/ убывание	Убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$	Возрастающая

? Перечислите свойства степенной функции с натуральным чётным показателем; нечётным показателем.

Упражнения

19.1. Функция задана формулой $f(x) = x^{19}$. Сравните:
1) $f(1{,}4)$ и $f(1{,}8)$; 3) $f(-6{,}9)$ и $f(6{,}9)$;
2) $f(-7{,}6)$ и $f(-8{,}5)$; 4) $f(0{,}2)$ и $f(-12)$.

19.2. Функция задана формулой $f(x) = x^{21}$. Сравните:
1) $f(20)$ и $f(17)$; 2) $f(-44)$ и $f(1{,}5)$; 3) $f(-52)$ и $f(-45)$.

19.3. Функция задана формулой $f(x) = x^{20}$. Сравните:
1) $f(3{,}6)$ и $f(4{,}2)$; 3) $f(-2{,}4)$ и $f(2{,}4)$;
2) $f(-6{,}7)$ и $f(-5{,}8)$; 4) $f(-15)$ и $f(2)$.

19.4. Функция задана формулой $f(x) = x^{50}$. Сравните:
1) $f(9{,}2)$ и $f(8{,}5)$; 3) $f(19)$ и $f(-19)$;
2) $f(-1{,}1)$ и $f(-1{,}2)$; 4) $f(-7)$ и $f(9)$.

19.5. Следует ли из равенства $x_1^n = x_2^n$, что $x_1 = x_2$, если: 1) n — чётное; 2) n — нечётное?

19.6. Следует ли из неравенства $x_1^n > x_2^n$, что $x_1 > x_2$, если: 1) n — чётное; 2) n — нечётное?

19.7. Следует ли из неравенства $x_1 > x_2$, что $x_1^n > x_2^n$, если: 1) n — чётное; 2) n — нечётное?

19.8. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение:

1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

19.9. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $x^8 = 9a - a^3$?

19.10. Существует ли чётная функция f, определённая на $\boldsymbol{R}$, удовлетворяющая условиям: $f(0) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 1024$?

19.11. Существует ли нечётная функция f, определённая на $\boldsymbol{R}$, удовлетворяющая условиям: $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(3) = 243$?

19.12. Постройте график функции:

1) $y = x^3 - 1$; 4) $y = (x - 1)^4$; 7) $y = -\frac{1}{2}x^4$;

2) $y = (x + 2)^3$; 5) $y = (x + 1)^4 - 1$; 8) $y = |x^3|$;

3) $y = x^4 - 4$; 6) $y = -x^3$; 9) $y = (|x| + 1)^4$.

19.13. Постройте график функции:

1) $y = x^3 + 3$; 4) $y = (x + 1)^4$; 7) $y = -x^4$;

2) $y = (x - 3)^3$; 5) $y = (x - 1)^3 + 2$; 8) $y = (|x| - 2)^3$;

3) $y = x^4 + 2$; 6) $y = \frac{1}{4}x^3$; 9) $y = |x + 1|^3$.

19.14. Постройте график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x^4, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^5, \text{ если } x < -1, \\ -x - 2, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$

Пользуясь построенным графиком, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания данной функции.

19.15. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ если } x < 0, \\ -\sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$ Пользуясь построенным графиком, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания данной функции.

19.16. Постройте график функции:

1) $y = |x|x^4$; 2) $y = |x|x^4 + x^5$.

19.17. Постройте график функции:

1) $y = |x|x^3$; 2) $y = |x|x^4 - x^5$.

19.18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке:

1) $[0; 2]$; 4) $(-\infty; -2]$;

2) $[-2; -1]$; 5) $(-2; 1)$.

3) $[-1; 1]$;

19.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^6$ на промежутке:

1) $[-13; -1]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$.

19.20. Чётным или нечётным натуральным числом является показатель степени n функции $f(x) = x^n$, если:

1) $f(-4) > f(-2)$; 3) $f(-4) < f(-2)$; 5) $f(-4) > f(2)$;

2) $f(-4) < f(2)$; 4) $f(4) > f(2)$; 6) $f(4) > f(-2)$?

19.21. Решите уравнение:

1) $x^{11} + x^3 = 2$; 2) $2x^4 + x^{10} = 3$.

19.22. Решите уравнение:

1) $4x^3 + x^7 = -5$; 2) $x^6 + 3x^8 = 4$.

19.23. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке $[-1; a]$.

19.24. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^6$ на промежутке $[a; 2]$.

19.25. Решите уравнение $5x^{17} - 3x^8 = 2$.

19.26. Решите уравнение $11x^{15} + 2x^4 = -9$.

Упражнения для повторения

19.27. Известно, что $A \subset B$. Вместо знака * запишите знак $\cup$ или $\cap$ так, чтобы образовалось верное равенство:

1) $A * B = B$; 2) $A * B = A$.

19.28. Решите уравнение:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;

2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;

3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;

5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

§ 20 Обратная функция

На рисунках 20.1, 20.2 изображены графики функций f и g.

Любая горизонтальная прямая пересекает график функции f не более чем в одной точке. Это означает, что каждому числу $y_0 \in E(f)$ соответствует единственное число $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Функция g таким свойством не обладает. Действительно, из рисунка 20.2 видно, что

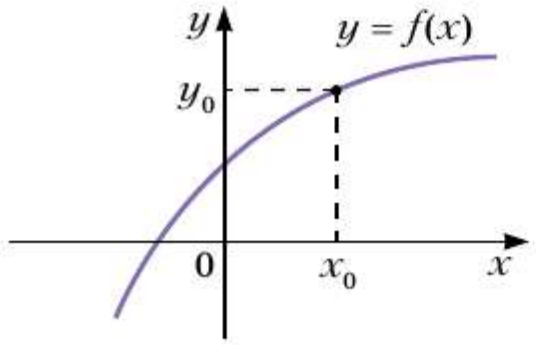


Рис. **20.1**

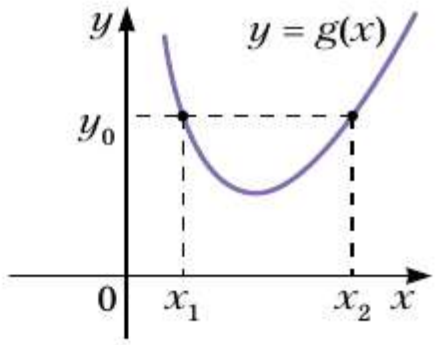


Рис. **20.2**

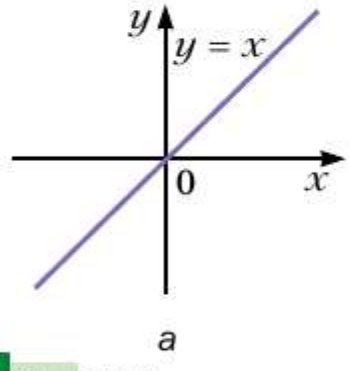
значению y_0 соответствуют два значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $y_0 = g(x_1)$ и $y_0 = g(x_2)$.

Определение

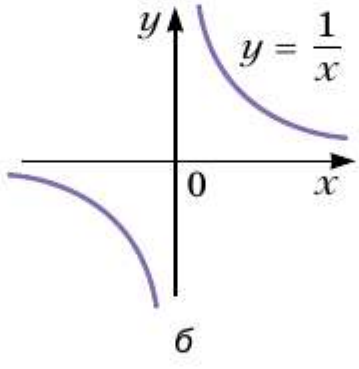
Функцию $y = f(x)$ называют обратимой, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует единственное $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$.

Функция f (см. рис. 20.1) является обратимой. Функция g (см. рис. 20.2) не является обратимой.

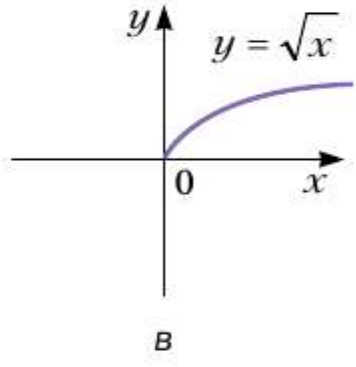
Функции $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ являются примерами обратимых функций (рис. 20.3).



а



б



в

Рис. **20.3**

Функция $y = x^2$ не является обратимой. Например, значению функции, равному 4, соответствуют два значения аргумента $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

Теорема 20.1

Если функция является возрастающей (убывающей), то она обратима.

Доказательство

Предположим, что существует возрастающая функция f, не являющаяся обратимой. Тогда найдётся $y_0 \in E(f)$, для которого существуют x_1

и x_2 ($x_1 < x_2$) такие, что $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Вместе с тем функция f — возрастающая, и из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Получили противоречие.

Аналогично рассматривают случай, когда функция f является убывающей. ■

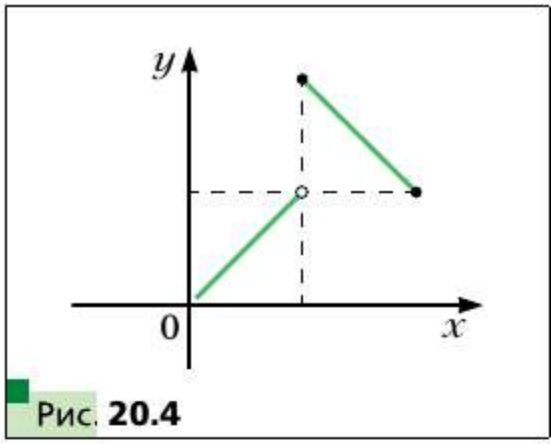


Рис. **20.4**

Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. не любая обратимая функция является возрастающей (убывающей).

Например, на рисунке 20.4 изображён график обратимой функции, которая не является ни возрастающей, ни убывающей.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функция f является обратимой.

Поменяем строки таблицы местами и рассмотрим функцию $y = g(x)$, заданную полученной таблицей:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функции f и g связаны такими свойствами:

1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g(\sqrt{7}) = 7$.

Эти равенства означают, что если $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$, и если $g(x_1) = y_1$, то $f(y_1) = x_1$.

Определение

Функции f и g называют взаимно обратными, если:

1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;

2) для любого $x_0 \in D(f)$ из равенства $f(x_0) = y_0$ следует, что $g(y_0) = x_0$, т. е. $g(f(x_0)) = x_0$.

Также говорят, что функция g является **обратной** к функции f, а функция f — **обратной** к функции g.

Рассмотренные выше функции, заданные таблично, являются примером взаимно обратных функций.

Второе условие в определении взаимно обратных функций можно заменить на такое: для любого $x_0 \in D(g)$ из равенства $g(x_0) = y_0$ следует, что $f(y_0) = x_0$, т. е. $f(g(x_0)) = x_0$.

Пример. Докажите, что функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = \frac{x+1}{2}$ являются взаимно обратными.

Решение. Имеем: $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Пусть $f(x_0) = y_0$, т. е. $y_0 = 2x_0 - 1$. Докажем, что $g(y_0) = x_0$.

Имеем: $g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ■

Если функция f не является обратимой, то не существует функции, обратной к ней. Любая обратимая функция имеет обратную.

Пусть f — обратимая функция, а функция g — ей обратная. Из определения взаимно обратных функций следует, что если f — это правило, позволяющее по значению переменной x из $D(f)$ найти соответствующее значение переменной y из $E(f)$, то g — это правило, позволяющее по значению переменной y найти соответствующее значение переменной x. ■

В рассмотренном выше примере было доказано, что для функции $y = 2x - 1$ обратной является функция $y = \frac{x+1}{2}$. Однако решение этой задачи не показывает, как по данной функции найти ей обратную. Покажем, как это можно сделать.

Функция $y = 2x - 1$ — возрастающая. Следовательно, она является обратимой.

Чтобы задать обратную функцию, надо указать правило, позволяющее по каждому значению переменной y найти такое значение переменной x, что $y = 2x - 1$. Для этого выразим x через y.

Имеем: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Полученное равенство задаёт функцию с аргументом y и зависимой переменной x.

Традиционно независимую переменную обозначают буквой x, а зависимую — буквой y. Придерживаясь таких обозначений, можно сказать, что мы получили функцию, которая задаётся формулой $y = \frac{x+1}{2}$. Она и является искомой.

Рассмотрим ещё один пример. Функция $y = x^2$ не является обратимой. Вместе с тем эта функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, является обратимой. Также принято говорить, что функция $y = x^2$ является **обратимой на множестве** $[0; +\infty)$. Найдём функцию, обратную к функции f.

Имеем: $y = x^2$, где $x \in [0; +\infty)$. Отсюда $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$. Равенство $\sqrt{y} = x$ задаёт функцию с аргументом y и зависимой переменной x.

Воспользовавшись традиционными обозначениями, получим функцию $y = \sqrt{x}$, обратную к функции f.

Теорема 20.2

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство

Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Тогда $b = f(a)$. Если функция g является обратной к функции f, то $g(b) = a$, т. е. точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$.

Покажем, что точки M и N симметричны относительно прямой $y = x$.

Если $a = b$, то точки M и N совпадают и принадлежат прямой $y = x$.

При $a \neq b$ имеем (рис. 20.5): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка MN, а следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру отрезка MN. Середина K отрезка MN имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, т. е. принадлежит прямой $y = x$. Следовательно, прямая $y = x$ является серединным перпендикуляром отрезка MN. ■

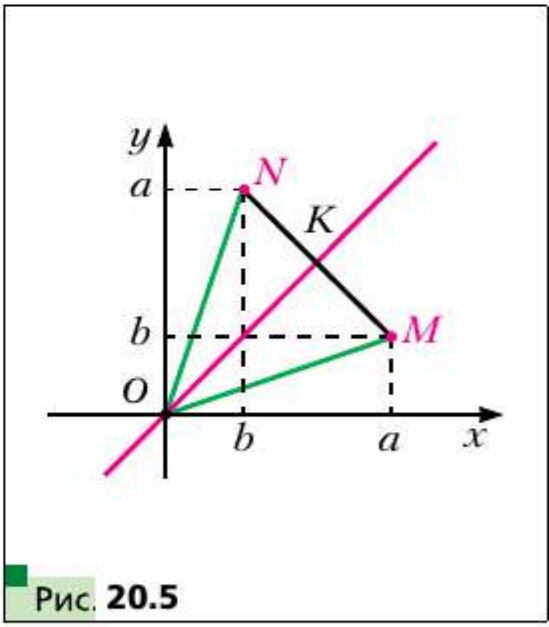


Рис. **20.5**

Доказанную теорему иллюстрируют графики взаимно обратных функций, которые рассматривались выше (рис. 20.6).

1. Какую функцию называют обратимой?
2. Какие функции называют взаимно обратными?
3. Каким свойством обладают графики взаимно обратных функций?

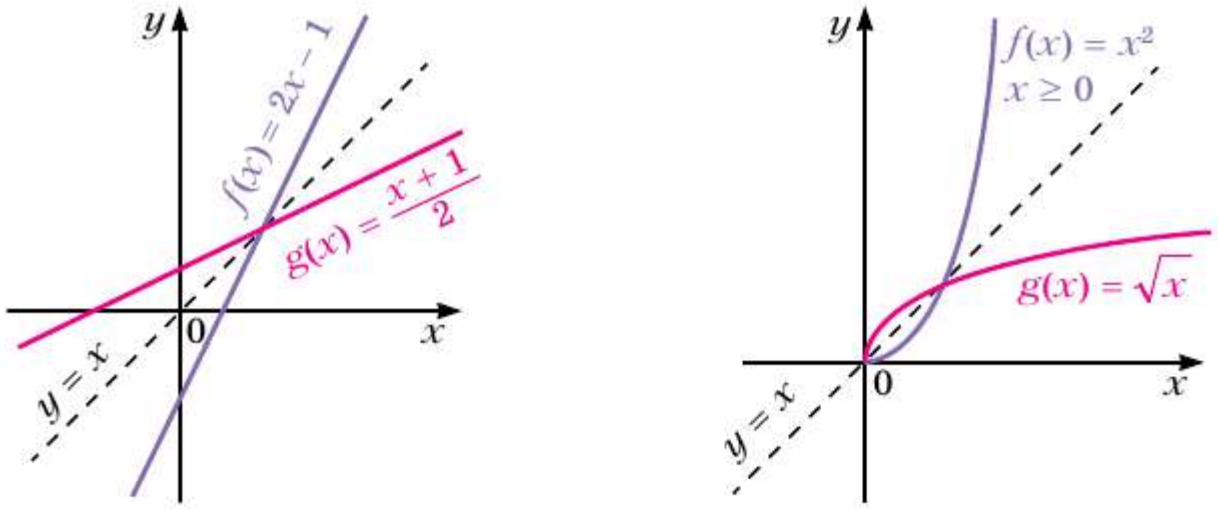


Рис. **20.6**

Упражнения

20.1. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 20.7, являются обратимыми?

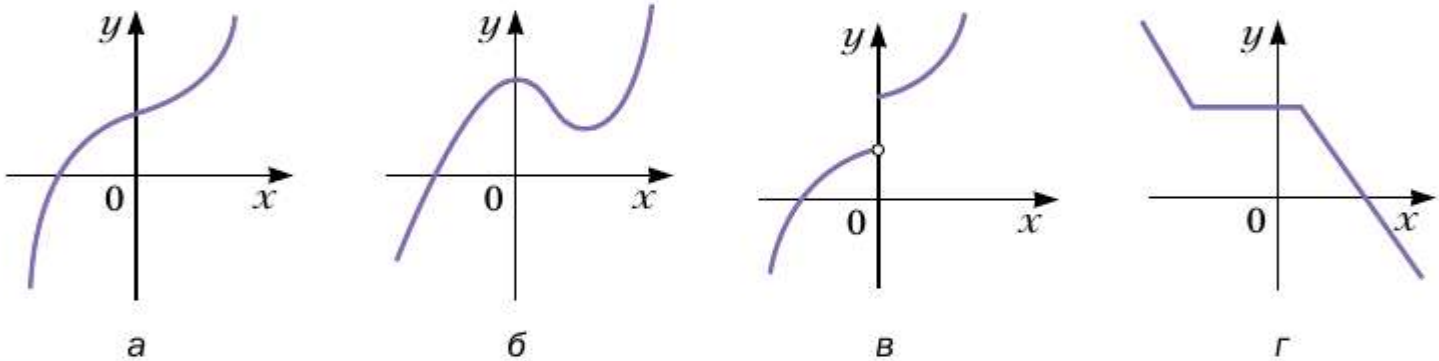


Рис. **20.7**

20.2. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 20.8, являются обратимыми?

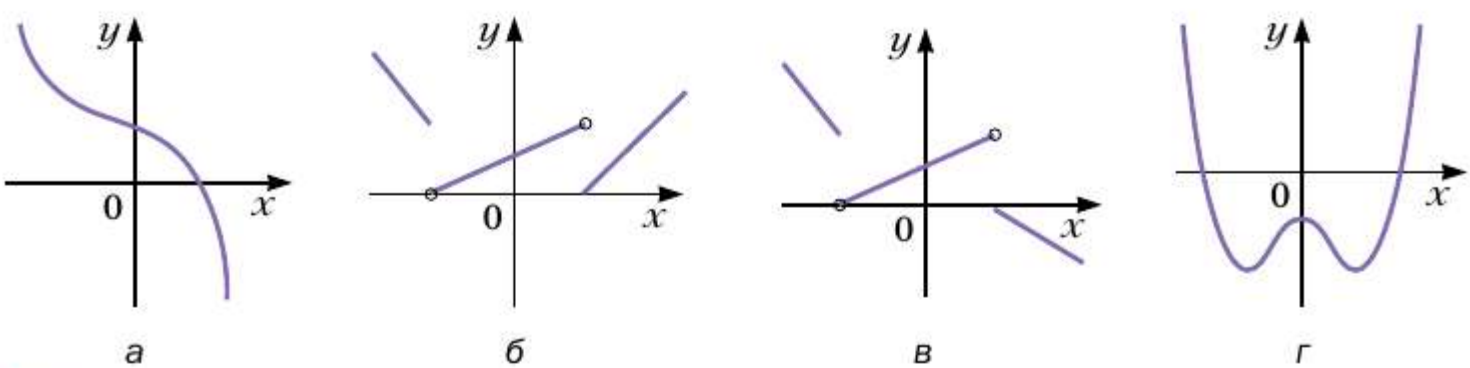


Рис. **20.8**

20.3. Докажите, что данная функция не является обратимой:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$; 4) $y = [x]$.

◆ ◆

20.4. Докажите, что функции f и g являются взаимно обратными:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

20.5. Докажите, что функции f и g являются взаимно обратными:

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

20.6. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$; 4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

20.7. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 0{,}2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$; 4) $y = 4x - 5$.

20.8. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 2\sqrt{x} - 1$; 2) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$; 3) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

20.9. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = \frac{x+2}{x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $D(y) = [2; +\infty)$.

20.10. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной к ней:

1) $y = -0{,}5x + 2$; 2) $y = \sqrt{x+1}$; 3) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 2x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

20.11. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной к ней:

1) $y = 3x - 1$;

2) $y = x^2 - 4$, если $x \geqslant 0$;

3) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

20.12. Найдите функцию, обратную к данной:

$$y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, \text{ если } x \geqslant 3, \\ 2x - 5, \text{ если } x < 3. \end{cases}$$

20.13. Найдите функцию, обратную к данной:

$$y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ если } x \geqslant 1, \\ 2 - x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

Упражнения для повторения

20.14. Какие множества равны:

$A = \{x \mid x = 5n - 1, n \in \boldsymbol{Z}\}$; $C = \{x \mid x = 5n + 4, n \in \boldsymbol{Z}\}$;

$B = \{x \mid x = 10n + 9, n \in \boldsymbol{Z}\}$; $D = \{x \mid x = 10n - 1, n \in \boldsymbol{Z}\}$?

20.15. Используя диаграммы Эйлера, проиллюстрируйте свойства операций над множествами:

1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

§ 21 Определение корня n-й степени

Вы знаете, что корнем второй степени (квадратным корнем) из числа a называют такое число, вторая степень которого равна a. Аналогично определяют корень n-й степени из числа a, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$.

Определение

Корнем n-й степени из числа a, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, называют такое число, n-я степень которого равна a.

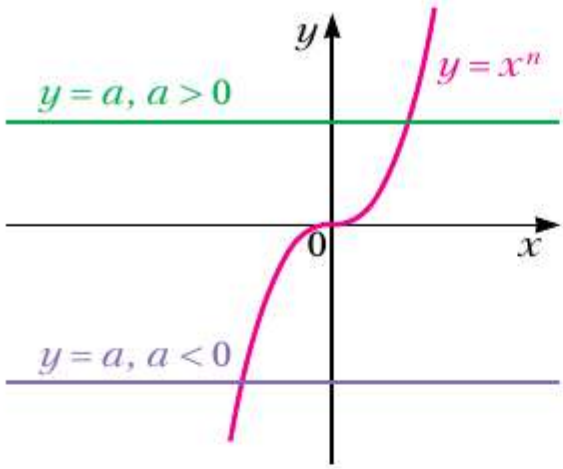
Например, корнем пятой степени из числа 32 является число 2, так как $2^5 = 32$; корнем третьей степени из числа -64 является число -4, так как $(-4)^3 = -64$; корнями четвёртой степени из числа 81 являются числа 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Из определения следует, что любой корень уравнения $x^n = a$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, является корнем n-й степени из числа a, и наоборот, любой корень n-й степени из числа a является корнем рассматриваемого уравнения.

Если n — нечётное натуральное число, то функция $y = x^n$ является возрастающей, и поскольку её областью значений является множество $\boldsymbol{R}$, то уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a.

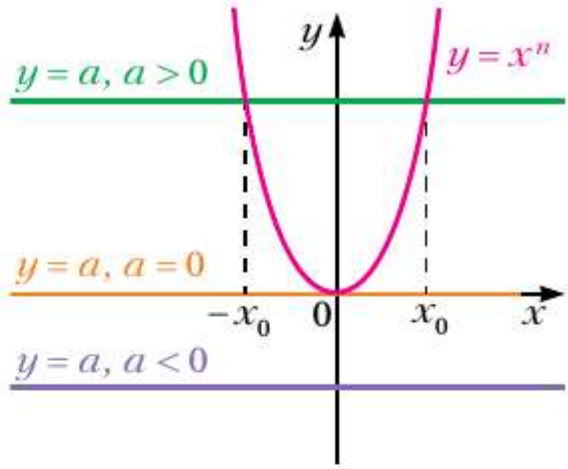
Рисунок 21.1 иллюстрирует последнее утверждение: при любом значении a графики функций $y = x^n$ и $y = a$ имеют одну общую точку. Тогда можно сделать такой вывод:

если n — нечётное натуральное число, большее 1, то корень n-й степени из любого числа существует, причём только один.



n — нечётное натуральное число, $n > 1$

Рис. **21.1**



n — чётное натуральное число

Рис. **21.2**

Корень нечётной степени n, $n > 1$, из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$ (читают: «корень n-й степени из a»). Например, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Знак $\sqrt[n]{\ }$ называют **знаком корня *n*-й степени** или **радикалом**. Выражение, стоящее под радикалом, называют **подкоренным выражением**.

Корень третьей степени также принято называть **кубическим корнем**. Например, запись $\sqrt[3]{2}$ читают: «кубический корень из числа 2».

Подчеркнём, что выражение $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \boldsymbol{N}$, существует при любом a.

Из определения корня n-й степени следует, что ***при любом a выполняется равенство***

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$$

Например, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Рассмотрим уравнение $x^n = a$, где n — чётное натуральное число.

Так как областью значений функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, является множество $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ данное уравнение не имеет корней.

Очевидно, что при $a = 0$ уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Функция $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и принимает все положительные значения. Следовательно, при $a \geqslant 0$ уравнение $x^n = a$, где n — чётное натуральное число, на промежутке $[0; +\infty)$ имеет единственный корень.

Поскольку рассматриваемая функция — чётная, то при $a > 0$ данное уравнение имеет два корня, которые являются противоположными числами.

У этих утверждений есть простая геометрическая интерпретация (рис. 21.2). Если $a < 0$, то графики функций $y = x^n$ и $y = a$ не имеют общих точек; если $a = 0$, то рассматриваемые графики имеют одну общую точку; если $a > 0$, то общих точек две, причём их абсциссы — противоположные числа.

Теперь можно сделать такой вывод:

если n — чётное натуральное число, то при $a < 0$ корня n-й степени из числа a не существует; при $a = 0$ корень n-й степени из числа a равен 0; при $a > 0$ существуют два противоположных числа, которые являются корнями n-й степени из числа a.

Вы знаете, что арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, вторая степень которого равна a. Аналогично определяют арифметический корень n-й степени.

Определение

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in N$, $n > 1$, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, так как $2 \geqslant 0$ и $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$ и $0^{10} = 0$.

Вообще, **если $b \geqslant 0$ и $b^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

Обратим внимание на то, что для обозначения арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа a и корня нечётной степени n из числа a используют одну и ту же запись: $\sqrt[n]{a}$. Запись $\sqrt[2k]{a}$, $k \in N$, используют только для обозначения арифметического корня. Заметим, что корень чётной степени из числа a не имеет обозначения.

С помощью знака корня n-й степени можно записывать корни уравнения $x^n = a$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$.

↳Если n — нечётное натуральное число, то при любом значении a рассматриваемое уравнение имеет единственный корень $x = \sqrt[n]{a}$.

↳Если n — чётное натуральное число и $a > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.

↳Если $a = 0$, то $x = 0$.

Например, корнем уравнения $x^3 = 7$ является число $\sqrt[3]{7}$; корнями уравнения $x^4 = 5$ являются два числа: $-\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{5}$.

Из определения арифметического корня n-й степени следует, что:

$$1)\ \sqrt[n]{a} \geqslant 0, \text{ где } a \geqslant 0;$$

$$2)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ где } a \geqslant 0.$$

Например, $\sqrt[6]{7} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажем, что при любом a и $k \in \boldsymbol{N}$

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}.$$

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k+1]{x} = y$, надо показать, что $y^{2k+1} = x$.

Имеем: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доказанное свойство позволяет корень нечётной степени из отрицательного числа выразить через арифметический корень.

Например, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

Выше было установлено, что корень нечётной степени, в частности кубический корень, из любого числа существует и принимает единственное значение. Поэтому каждому числу $x \in \boldsymbol{R}$ можно поставить в соответствие единственное число y такое, что $y = \sqrt[3]{x}$. Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, с областью определения $\boldsymbol{R}$.

Покажем, что функция f является обратной к функции $g(x) = x^3$.

Поскольку уравнение $\sqrt[3]{x} = a$ при любом a имеет корень (а именно число a^3), то областью значений функции f является множество $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$,

$E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Используя график функции $y = x^3$ и теорему 20.2, можно построить график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 21.3).

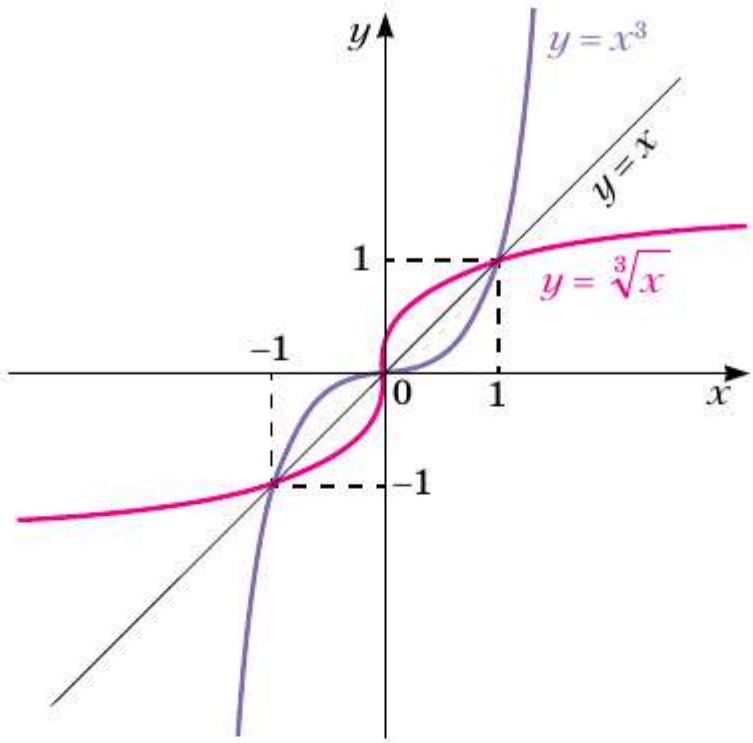


Рис. **21.3**

1. Что называют корнем n-й степени из числа?

2. Что называют арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа?

3. Какая функция является обратной к функции $y = x^3$?

Упражнения

21.1. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{216}$; 3) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 5) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 7) $\sqrt[4]{9^2}$;

2) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 4) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$; 8) $\sqrt[6]{8^2}$.

21.2. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; 3) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 4) $\sqrt[100]{49^{50}}$?

21.3. Вычислите:

1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 3) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 5) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$;

2) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 4) $-\sqrt[4]{7^4}$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

21.4. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$;

2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 6) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

21.5. Вычислите:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256} + 6 \cdot \left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$; 2) $\sqrt[5]{14^5} + \left(-2\sqrt{10}\right)^2 - \sqrt[7]{-128}$.

21.6. Вычислите:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[5]{-0{,}00032} - \left(-4\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\sqrt[3]{8000} \cdot \sqrt[4]{7\frac{58}{81}} - \left(-\sqrt[5]{8}\right)^5 + \sqrt[7]{17^7}$.

21.7. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt[3]{x-1}$; 2) $\sqrt[4]{x^2-x-2}$; 3) $\sqrt[4]{|x|-1}$; 4) $\sqrt[6]{x^2(x-3)}$.

21.8. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt[4]{x-2}$; 2) $\sqrt[6]{x^2-4x+3}$; 3) $\sqrt[8]{3-|x|}$; 4) $\sqrt[10]{|x|(x-6)}$.

21.9. Решите уравнение:

1) $x^5 = 9$; 3) $x^6 = 5$; 5) $27x^3 - 1 = 0$;

2) $x^7 = -2$; 4) $x^4 = -81$; 6) $(x+5)^4 = 10\,000$.

21.10. Решите уравнение:

1) $x^9 = 1$; 3) $x^{18} = 0$; 5) $64x^5 + 2 = 0$;

2) $x^{10} = 1$; 4) $x^6 = -64$; 6) $(x-3)^6 = 729$.

21.11. Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\sqrt[3]{x} = -6$; 5) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;

2) $\sqrt[4]{x} = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -2$; 6) $\sqrt[3]{2x+7} = 0$.

21.12. Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2} = 0$;

2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

21.13. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

◆ ◆

21.14. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt[4]{\frac{|x|-1}{x^2-9}}$; 2) $\sqrt[8]{6-|x|} + \frac{1}{\sqrt[4]{3-x}}$.

21.15. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt[6]{\frac{|x|-4}{x^2-36}}$; 2) $\sqrt[10]{|x|-3} - \frac{1}{\sqrt[4]{x+4}}$.

21.16. Решите уравнение:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3}=0$.

21.17. Решите уравнение:

1) $(|x|-3)\sqrt[6]{2-x}=0$; 2) $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3}=0$.

21.18. Постройте график функции:

1) $y=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+\left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4+1$;

2) $y=\left(\sqrt[6]{x}\right)^6+\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^6$.

21.19. Постройте график функции:

1) $y=x\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$; 2) $y=\left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8+\left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

21.20. Постройте график функции:

1) $y=\sqrt[3]{2-x}$; 3) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 5) $y=\sqrt[3]{|x-1|}$;

2) $y=\sqrt[3]{x-2}-2$; 4) $y=\sqrt[3]{|x|-1}$; 6) $y=\left|\sqrt[3]{x+1}-2\right|$.

21.21. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ на промежутке:

1) $[2;\ 3]$; 3) $[-2;\ 2]$; 5) $[-1;\ +\infty)$;

2) $[-1;\ 0]$; 4) $[-2;\ 1]$; 6) $(-\infty;\ 2)$.

21.22. Докажите, что является иррациональным число: 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[6]{6}$.

21.23. Докажите, что является иррациональным число: 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[4]{12}$.

21.24. В зависимости от значения параметра a определите количество корней уравнения:

1) $(x-a)\sqrt[4]{x+1}=0$; 3) $(x-a)(\sqrt[4]{x}-1)=0$.

2) $(x-a)(\sqrt[4]{x}+1)=0$;

21.25. В зависимости от значения параметра a определите количество корней уравнения:

1) $(x+1)\sqrt[4]{x-a}=0$; 2) $(x-1)(\sqrt[4]{x}-a)=0$.

21.26. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt[3]{x}=a-x$ в зависимости от значения параметра a?

Упражнения для повторения

21.27. Найдите объединение множеств A и B, если $A=\{x \mid x=4n,\ n\in \boldsymbol{Z}\}$, $B=\{x \mid x=4n+2,\ n\in \boldsymbol{Z}\}$.

21.28. Упростите выражение $\left(\dfrac{x^2}{x-y}-y\right)\cdot\left(x+\dfrac{y^2}{x+y}\right)^{-1}$.

Рассмотрим теоремы, выражающие свойства корня n-й степени.

Теорема 22.1

(первая теорема о корне из степени)

Для любого $a \in R$ и $k \in N$ выполняются равенства:

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$$
$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

Доказательство

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достаточно показать, что $y^{2k+1} = x$. Тогда первое из доказываемых равенств очевидно.

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k]{x} = y$, достаточно показать, что $y \geqslant 0$ и $y^{2k} = x$. Имеем: $|a| \geqslant 0$ и $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ■

Теорема 22.2

(корень из произведения)

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Доказательство

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[n]{x} = y$, где $x \geqslant 0$, достаточно показать, что $y \geqslant 0$ и $y^n = x$.

Имеем: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. ■

Из теоремы 22.2 следует, что если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$.

Теорема 22.3

(корень из частного)

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, $n \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Докажите эту теорему самостоятельно.
Заметим, что если $a \leqslant 0$ и $b < 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

Теорема 22.4

(степень корня)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Доказательство

Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ■

Теорема 22.5

(корень из корня)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Доказательство

Имеем: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ■

Теорема 22.6

(вторая теорема о корне из степени)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

Доказательство

Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ■

Пример 1. Упростите выражение: 1) $\sqrt[12]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2}$; 4) $\sqrt[6]{x^6y^6}$, если $x \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$.

Решение.

1) Из условия следует, что $a \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

2) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

3) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

4) Учитывая, что $x \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$, можно записать: $\sqrt[6]{x^6y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = |xy| = |x|\,|y| = x(-y) = -xy$. ■

Пример 2. Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 3) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 4) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, если $a < 0$.

Решение.

1) Представим число, стоящее под знаком корня, в виде произведения двух чисел, одно из которых является кубом рационального числа:

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

2) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5|\sqrt[8]{b^3} = b^5 \cdot \sqrt[8]{b^3}.$$

3) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt[8]{-b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}(-b)^3} = |b^5|\sqrt[8]{-b^3} = -b^5 \cdot \sqrt[8]{-b^3}.$$

4) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[6]{a^6b^7} = \sqrt[6]{a^6b^6b} = |a||b|\sqrt[6]{b} = -ab\sqrt[6]{b}$. ■

Пример 3. Внесите множитель под знак корня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Решение.

1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7a^4}$; если $a < 0$, то $a\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{7a^4}$.

3) Из условия следует, что $c \geqslant 0$. Тогда $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$.

4) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt[4]{-27b^5}.$$ ■

Пример 4. Сократите дробь: 1) $\dfrac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$; 2) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Решение.

1) Разложив числитель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}=\frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1}=\frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1}=\sqrt[6]{b}-1.$$

2) Разложив числитель и знаменатель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}.$$ ■

Пример 5. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}$.

Решение. Из условия следует, что числа a и b одного знака. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $a>0$ и $b>0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}+\sqrt[10]{b}\cdot\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{b}\left(\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}\right)}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}}.$$

Второй случай: $a<0$, $b<0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}-\left(\sqrt[10]{-b}\right)^2}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-b}\left(\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}\right)}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$

Случай, когда $a<0$ и $b<0$, можно рассмотреть иначе. Пусть $a=-x$, $b=-y$, где $x>0$, $y>0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{xy}+\sqrt[5]{-y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}-\sqrt[10]{y}\cdot\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{y}(\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y})}{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{x}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$ ■

Пример 6. Докажите, что $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$. Воспользуемся тем, что $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Имеем:

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right).$$

Отсюда $x^3=18+3x$; $x^3-3x-18=0$.

Рассмотрев делители числа 18, несложно установить, что $x = 3$ является корнем данного уравнения. Разделив многочлен $x^3 - 3x - 18$ на двучлен $x - 3$, получаем многочлен $x^2 + 3x + 6$.

Имеем: $(x - 3)(x^2 + 3x + 6) = 0$.

Это уравнение имеет единственный корень $x = 3$. ■

? Перечислите свойства корня n-й степени.

Упражнения

22.1. Найдите:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$; 2) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}$; 3) $\sqrt[6]{3^{18} \cdot 10^{24}}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12} \cdot 11^4}{5^8 \cdot 2^{16}}}$.

22.2. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 343}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 11^4}$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 4) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24} \cdot 3^{16}}{5^{16}}}$.

22.3. Найдите:

1) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$; 3) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 5) $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054} \cdot \sqrt[3]{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30} \cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6 \cdot 7^4}}$; 6) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{-9}$.

22.4. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; 4) $\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 5) $\sqrt[5]{2\sqrt{17} + 10} \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{17} - 10}$;

3) $\sqrt[7]{2^{15} \cdot 5^3} \cdot \sqrt[7]{2^6 \cdot 5^4}$; 6) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{80}$?

22.5. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\sqrt[15]{c^6}$; 4) $\sqrt[18]{a^8 b^{24}}$; 5) $\sqrt[12]{81}$.

22.6. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[21]{a^{14} b^7}$; 5) $\sqrt[9]{64}$.

22.7. Представьте выражение $\sqrt{a}$ в виде корня:

1) четвёртой степени; 3) десятой степени;

2) шестой степени; 4) восемнадцатой степени.

22.8. Представьте выражение $\sqrt[3]{b}$, $b \geqslant 0$, в виде корня:

1) шестой степени; 3) пятнадцатой степени;

2) девятой степени; 4) тридцатой степени.

22.9. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 5) $\sqrt[3]{40a^5}$; 7) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$;

2) $\sqrt[4]{162}$; 4) $\sqrt[6]{7290}$; 6) $\sqrt[3]{-a^7}$; 8) $\sqrt[3]{-108a^7b^{10}}$.

22.10. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$; 4) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

22.11. Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{3}$; 3) $-10\sqrt[4]{0{,}271}$; 5) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 7) $b\sqrt[5]{3b^3}$;

2) $4\sqrt[3]{5}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 6) $2\sqrt[5]{6y}$; 8) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

22.12. Внесите множитель под знак корня:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

22.13. Замените выражение тождественно равным ему:

1) $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$;

2) $\sqrt[3]{56m}+\sqrt[3]{-189m}-\sqrt[3]{-81n}-1{,}5\sqrt[3]{24n}+\sqrt[3]{448m}$.

22.14. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$;

2) $\sqrt[4]{625a}+3\sqrt[4]{16a}-2\sqrt[4]{81a}+4\sqrt[4]{1296a}$.

22.15. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 5) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 4) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

22.16. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 5) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{18}}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[9]{c^2\sqrt[4]{c}}$; 6) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

22.17. Упростите выражение:

1) $(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})(1-\sqrt[3]{a})$; 2) $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1-\sqrt[4]{a})$.

22.18. Упростите выражение:

1) $(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})(\sqrt[8]{m}+\sqrt[8]{n})(\sqrt[8]{m}-\sqrt[8]{n})$;

2) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})$.

22.19. Сократите дробь:

1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 4) $\frac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 7) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

2) $\frac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 5) $\frac{a\sqrt[3]{b^2}-b\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}$; 8) $\frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

3) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{m}}{m-\sqrt[4]{m^3}}$; 6) $\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 9) $\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

22.20. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$;

3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$;

5) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

6) $\dfrac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

22.21. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{(a-5)^3}=\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^3$;

2) $\sqrt[3]{(a-5)^4}=\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$;

3) $\sqrt[4]{(a-2)^4}=\left(\sqrt[4]{a-2}\right)^4$;

4) $\sqrt[6]{a(a-1)}=\sqrt[6]{a}\sqrt[6]{(1-a)}$;

5) $\sqrt[10]{a-4}\cdot\sqrt[10]{(a-4)^9}=a-4$;

6) $\dfrac{\sqrt[12]{a-2}}{\sqrt[12]{3-a}}=\sqrt[12]{\dfrac{2-a}{a-3}}$?

22.22. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$;

2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$;

3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$;

4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

22.23. При каких значениях a и b выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;

2) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;

3) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;

4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

22.24. При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)}=\sqrt[8]{x-3}\cdot\sqrt[8]{7-x}$;

3) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$?

22.25. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, если $m\geqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{n^4}$, если $n\leqslant 0$;

3) $\sqrt[8]{256k^8}$, если $k\leqslant 0$;

4) $\sqrt[6]{c^{24}}$;

5) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, если $b\leqslant 0$;

6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, если $y\geqslant 0$;

7) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, если $a\leqslant 0$, $b\geqslant 0$;

8) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, если $x\leqslant 0$.

22.26. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;

2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, если $b\geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x\leqslant 0$;

4) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, если $p\geqslant 0$;

5) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, если $m\leqslant 0$, $n\leqslant 0$;

6) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}$, если $b\geqslant 0$, $c\leqslant 0$.

22.27. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;

2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, если $a > 0$;

3) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, если $x \neq 0$;

4) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;

5) $\sqrt[4]{162a^4b^8c^{12}}$, если $a > 0$, $c < 0$;

6) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;

7) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

22.28. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, если $a \leqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{-625a^5}$;

3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, если $a < 0$, $b < 0$;

4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, если $a > 0$.

22.29. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, если $a \geqslant 0$;

2) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, если $a > 0$, $b < 0$;

3) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;

4) $b\sqrt[6]{6}$;

5) $a\sqrt[6]{-a}$;

6) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, если $b \leqslant 0$.

22.30. Внесите множитель под знак корня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, если $c \leqslant 0$;

2) $a\sqrt[6]{a}$;

3) $-ab\sqrt[4]{6}$, если $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

4) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, если $a < 0$;

5) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

22.31. Докажите, что значение выражения является целым числом:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}}.$$

22.32. При каких значениях a и b верно равенство:

1) $\sqrt[4]{a^5b^5} = ab\sqrt[4]{ab}$;

2) $\sqrt[4]{a^4b} = a\sqrt[4]{b}$;

3) $\sqrt[4]{a^4b} = -a\sqrt[4]{b}$?

22.33. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^3}$;

2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$;

3) $\sqrt[9]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$;

4) $\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2}$.

22.34. Упростите выражение:

1) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$;

2) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$;

3) $\sqrt[12]{(\sqrt{11}-3)^3}$;

4) $\sqrt[15]{(\sqrt{7}-3)^3}$.

22.35. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$;

2) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$.

22.36. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1}\cdot\sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

22.37. Постройте график функции:

1) $y=2x+\sqrt[6]{x^6}$;

2) $y=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}$;

3) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$;

4) $y=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^2}$;

5) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}}+2$;

6) $y=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^9}$.

22.38. Постройте график функции:

1) $y=\sqrt[8]{x^8}-2x$;

2) $y=\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{-x^3}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

22.39. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}+27}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[6]{a}-3}{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[6]{a}+9}-\dfrac{\sqrt[6]{ab}-9}{\sqrt{a}+27}\right)$;

5) $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2}}$.

22.40. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{m-8}=1.$

◆ ◆ ◆

22.41. Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

22.42. Докажите, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

22.43. Упростите выражение $(\sqrt[32]{2}+1)(\sqrt[16]{2}+1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$.

22.44. Упростите выражение $(\sqrt[64]{a}+1)(\sqrt[32]{a}+1)\cdot\ldots\cdot(\sqrt{a}+1)$.

22.45. Приведите пример такого многочлена с целыми коэффициентами, что число $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ является его корнем.

22.46. Приведите пример такого многочлена с целыми коэффициентами, что число $\sqrt[3]{2}+3$ является его корнем.

22.47. Докажите, что является иррациональным число:

1) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$; 2) $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$.

22.48. Докажите, что является иррациональным число:

1) $\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

22.49. Докажите равенство

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{\text{10 радикалов}}=\sqrt[1024]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[1024]{2-\sqrt{3}}.$$

22.50. Докажите равенство

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{14}}}}}}=\sqrt[64]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[64]{6-\sqrt{35}}.$$

Упражнения для повторения

22.51. Докажите, что при любом целом значении n значение выражения $n(n+1)(2n+1)$ кратно 6.

22.52. Найдите все натуральные значения n, при которых является целым числом значение выражения $\dfrac{2n+11}{n+3}$.

§ 23 Степень с рациональным показателем и её свойства

Напомним определение степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}},\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1;$$

$$a^1 = a.$$

Вы знаете, что степень с натуральным показателем обладает такими свойствами:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3. $(a^m)^n = a^{mn}$;
4. $(ab)^n = a^n b^n$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Позже вы ознакомились с определениями степени с нулевым показателем и степени с отрицательным целым показателем:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Эти определения очень удачные: при таком подходе все пять свойств степени с натуральным показателем остались справедливыми и для степени с целым показателем.

Введём понятие степени с дробным показателем, т. е. степени a^r, показатель которой является рациональным числом вида $r = \frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$. Желательно сделать это так, чтобы степень с дробным показателем обладала всеми свойствами степени с целым показателем. Подсказкой для такого определения может служить следующий пример.

Обозначим через x искомое значение степени $2^{\frac{2}{3}}$, т. е. $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Учитывая свойство $(a^m)^n = a^{mn}$, можно записать $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Следовательно, x — это кубический корень из числа 2^2, т. е. $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким образом, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Эти соображения подсказывают, что целесообразно принять следующее определение.

Определение

Степенью положительного числа a с рациональным показателем r, представленным в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, т. е.

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Например, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Заметим, что значение степени a^r, где r — рациональное число, не зависит от того, в виде какой дроби представлено число r. Это можно показать, используя равенства $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ и $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяют только для положительного рационального показателя.

Определение

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, где $m \in N$, $n \in N$.

Заметим, что, например, запись $0^{-\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

Подчеркнём, что в определениях не идёт речи о степени $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, например, выражение $(-2)^{\frac{1}{3}}$ осталось неопределённым. Вместе с тем выражение $\sqrt[3]{-2}$ имеет смысл. Возникает естественный вопрос: почему не считать, что $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажем, что такая договорённость привела бы к противоречию:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Получили, что отрицательное число $\sqrt[3]{-2}$ равно положительному числу $\sqrt[6]{4}$.

Покажем, что свойства степени с целым показателем остаются справедливыми и для степени с произвольным рациональным показателем.

Теорема 23.1

(произведение степеней)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

Доказательство

Запишем рациональные числа p и q в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$. Имеем:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacksquare$$

Следствие

Для любого $a > 0$ и любого рационального числа p выполняется равенство

$$\boldsymbol{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доказательство

Применяя теорему 23.1, запишем: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Отсюда $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. $\blacksquare$

Теорема 23.2

(частное степеней)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$\boldsymbol{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доказательство

Применяя теорему 23.1, запишем: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Отсюда $a^{p-q} = a^p : a^q$. $\blacksquare$

Теорема 23.3

(степень степени)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доказательство

Пусть $p = \frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, и $q = \frac{s}{k}$, $s \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 1$. Имеем:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}. \blacksquare$$

Теорема 23.4

(степень произведения и степень частного)

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p выполняются равенства

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 1. Постройте график функции $f(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$.

Решение. Областью определения функции f является множество $(0; +\infty)$. Данную функцию можно задать такими условиями: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. График функции изображён на рисунке 23.1. ■

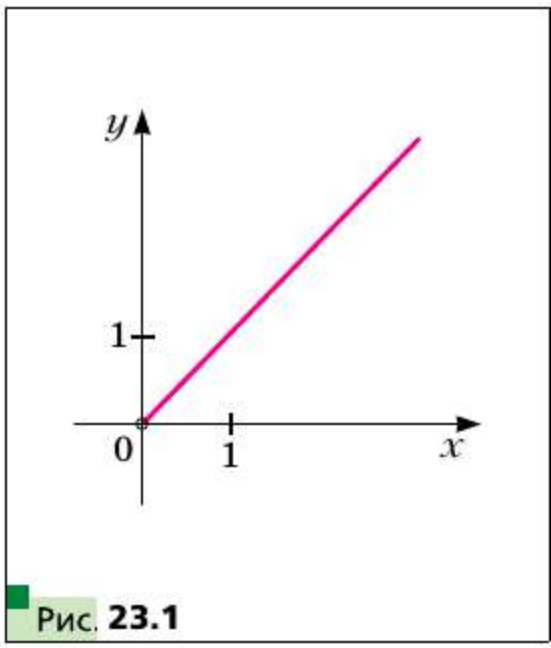


Рис. **23.1**

Рассмотрим примеры, в которых выполняются тождественные преобразования выражений, содержащих степени с рациональным показателем.

Пример 2. Упростите выражение:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}).$$

Решение. Раскроем скобки, используя правило умножения многочленов, формулу разности квадратов, а затем приведём подобные слагаемые:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) =$$
$$= 3a^{0,6} - 12a^{0,3}b^{0,2} + a^{0,3}b^{0,2} - 4b^{0,4} - a^{0,6} + 4b^{0,4} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}. \blacksquare$$

Пример 3. Разложите на множители выражение $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}}$, используя формулу: 1) разности квадратов; 2) разности кубов.

Решение.

1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(b^{\frac{3}{8}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{3}{8}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{3}{8}}\right)$.

2) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}} = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$. ■

Пример 4. Сократите дробь: 1) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$.

Решение.

1) Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получаем:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}}.$$

2) Имеем: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$ ■

Пример 5. Упростите выражение $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^{\frac{1}{3}} - 2} - \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} - \dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}} - 4}$.

Решение. Выполним замену $x^{\frac{1}{3}} = y$. Тогда данное выражение принимает вид:

$$\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

Это выражение легко упростить. Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\dfrac{8}{x^{\frac{1}{3}} + 2}$. ■

1. Сформулируйте определение степени с рациональным показателем.
2. Перечислите свойства степени с рациональным показателем.

Упражнения

23.1. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{7}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{7}}$; 4) $(m+n)^{2,5}$.

23.2. Замените степень с дробным показателем корнем:

1) $3^{-\frac{1}{9}}$; 2) $c^{0,2}$; 3) $x^{\frac{6}{7}}$; 4) $(a-2b)^{\frac{9}{16}}$.

23.3. Представьте корень в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[7]{6^5}$; 3) $\sqrt[5]{2^{-2}}$; 4) $\sqrt[8]{a^7 - b^7}$.

23.4. Замените корень степенью с дробным показателем:

1) $\sqrt[7]{a^3}$; 2) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 3) $\sqrt[6]{5a^5}$; 4) $\sqrt[4]{x + y}$; 5) $\sqrt[13]{0{,}3^8}$.

23.5. Найдите значение выражения:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $-5 \cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 5) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 4) $0{,}216^{-\frac{1}{3}}$; 6) $32^{-0{,}2}$.

23.6. Чему равно значение выражения:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 4) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

23.7. Найдите значение выражения:

1) $(5^{-0{,}8})^6 \cdot 5^{4{,}8}$; 3) $\left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{700}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 5) $36^{0{,}4} \cdot 6^{1{,}2}$;

2) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1{,}5}$; 4) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$; 6) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1{,}6} \cdot 16^{0{,}6}$.

23.8. Чему равно значение выражения:

1) $5^{3{,}4} \cdot 5^{-1{,}8} \cdot 5^{-2{,}6}$; 3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$; 5) $\left(2\frac{6}{7}\right)^{2{,}5} \cdot 1{,}4^{2{,}5}$;

2) $(7^{-0{,}7})^8 : 7^{-7{,}6}$; 4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}25}$; 6) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$?

23.9. Известно, что a — положительное число. Представьте a в виде:

1) квадрата; 3) шестой степени;
2) куба; 4) восьмой степени.

23.10. Известно, что b — положительное число. Представьте в виде куба выражение:

1) b^2; 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 3) $b^{\frac{1}{3}}$; 4) $b^{-1{,}8}$; 5) $b^{\frac{7}{11}}$.

23.11. Раскройте скобки:

1) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 4\right) + 8a^{\frac{1}{2}}$; 4) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

2) $(a^{0{,}5} - 3b^{0{,}3})(2a^{0{,}5} + b^{0{,}3})$; 5) $\left(a^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}a^{-\frac{1}{6}}\right)^2$;

3) $\left(3b^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{2}}\right)$; 6) $(b^{0{,}4} + 3)^2 - 6b^{0{,}4}$;

7) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

8) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$;

9) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$;

10) $\left(x^{\frac{2}{9}}-1\right)\left(x^{\frac{4}{9}}+x^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)$.

23.12. Раскройте скобки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;

4) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

5) $\left(b^{\frac{4}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

6) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;

7) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^2+8y^2$;

8) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$.

23.13. Представьте данное выражение в виде разности квадратов и разложите его на множители (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) $a-b$; 2) a^3-b^3; 3) $x^{\frac{1}{2}}-3$; 4) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{7}}$;

23.14. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) a^5-b^5; 2) $x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$; 3) $5-c$; 4) $16x^{0,3}-25y^{\frac{2}{9}}$.

23.15. Представьте данное выражение в виде суммы кубов и разложите его на множители (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) $a+b$; 2) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\frac{3}{2}}+27$; 4) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$.

23.16. Разложите на множители, используя формулу разности кубов (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) $a-b$; 2) $a^{1,5}-b^{1,5}$; 3) $m^{0,6}-8n^{1,8}$; 4) $x^{\frac{6}{7}}-6$.

23.17. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-5}$;

2) $\dfrac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}$;

3) $\dfrac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

5) $\dfrac{4c^{\frac{2}{3}}-12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}}-3d^{\frac{1}{3}}}$;

6) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

7) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$;

8) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+7a^{\frac{1}{2}}}{a-49a^{\frac{1}{2}}}$;

9) $\dfrac{30^{\frac{1}{5}}-6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}-2^{\frac{1}{5}}}$.

23.18. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$;

3) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

5) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$;

6) $\dfrac{x^{3,5}y^{2,5}-x^{2,5}y^{3,5}}{x+2x^{0,5}y^{0,5}+y}$;

7) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$;

8) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}}-36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}}-6m^{\frac{1}{3}}}$;

9) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}}$.

23.19. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\left((a-2)^{\frac{1}{3}}\right)^3=a-2$; 2) $\left((a-2)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}=a-2$?

23.20. Постройте график функции:

1) $y=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$; 2) $y=\left((x-2)^{\frac{1}{4}}\right)^4$; 3) $y=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}$.

23.21. Вычислите значение выражения:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;

3) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0,81)^{-0,5}$;

4) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$;

5) $\dfrac{10\,000^{0,4}\cdot 10^{0,5}}{100^{0,3}\cdot 1000^{\frac{1}{6}}}$;

6) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}}\cdot\dfrac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}}$;

7) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}:36^{-\frac{1}{6}}$;

8) $\left(\dfrac{3^{-\frac{5}{6}}\cdot 7^{-\frac{5}{6}}}{21^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{-6}$.

23.22. Найдите значение выражения:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0,0016^{-\frac{3}{4}}-0,04^{-\frac{1}{2}}+0,216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $\dfrac{32^{0,24}\cdot 4^{0,7}}{64^{0,6}\cdot 16^{0,25}}$;

5) $\dfrac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}}\cdot\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$;

6) $\left(\dfrac{5^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{15^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-1,5}$.

23.23. Решите уравнение:

1) $x^{-\frac{2}{3}} = 0{,}04$; 2) $(x-2)^{\frac{5}{2}} = 32$; 3) $(x^2-2x)^{-\frac{1}{4}} = -1$.

23.24. Решите уравнение:

1) $x^{-1,5} = 27$; 2) $(x-1)^{-\frac{2}{5}} = 100$; 3) $(x-5)^{\frac{3}{7}} = 0$.

23.25. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}} - \dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}} + \dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}} \cdot \dfrac{a - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{-\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}$.

23.26. Упростите выражение:

1) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\left(1 - a^{\frac{1}{36}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{36}} + a^{\frac{1}{18}}\right) + \dfrac{4 - a^{\frac{1}{6}}}{2 - a^{\frac{1}{12}}}$;

3) $\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) : \left(\dfrac{b^{\frac{5}{4}}}{a} - \dfrac{b}{a^{\frac{3}{4}}}\right)$;

4) $\dfrac{m^{\frac{5}{2}} - m^{\frac{3}{2}}}{m^3 - m^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{m^{\frac{1}{2}} + m}{m^2 + m^{\frac{3}{2}}}$.

23.27. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1} - \dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right) : \dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1} = \dfrac{2}{a-1}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)} = 2a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}$.

23.28. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}} + mn^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \dfrac{m}{n} = n^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1} - b^{-1}} - \dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}}\right) : \dfrac{a^{-\frac{2}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}$.

23.29. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}} - 2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b} : a^{\frac{1}{3}}$;

2) $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^4} - 8y\sqrt[3]{x}\right) : \sqrt[3]{xy}} \cdot \left(2 - \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$.

23.30. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{4}{3}}-27m^{\frac{1}{3}}n}{m^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}$.

23.31. Упростите выражение $(a^{0,125}+b^{0,75})(a^{0,25}+b^{1,5})(a^{0,5}+b^3)(a+b^6)$.

23.32. Упростите выражение $a^{0,2}+a^{0,5}+a^{0,8}+a^{1,1}+\ldots+a^{7,1}$.

23.33. Упростите выражение $b^{12,7}-b^{12,6}+b^{12,5}-b^{12,4}+\ldots+b^{3,3}$.

Упражнения для повторения

23.34. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что значение выражения 5^n+1 кратно значению выражения 5^k-1?

23.35. Докажите, что не существует такого натурального числа p, для которого числа $p+5$ и $p+10$ являются простыми.

Итоги главы 4

Обратимая функция

Функцию $y = f(x)$ называют обратимой, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует единственное $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$.

Взаимно обратные функции

Функции f и g называют взаимно обратными, если:

1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;

2) для любого $x_0 \in D(f)$ из равенства $f(x_0) = y_0$ следует, что $g(y_0) = x_0$, то есть $g(f(x_0)) = x_0$.

Свойство графиков взаимно обратных функций

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Первая теорема о корне из степени

Для любого $a \in R$ и $k \in N$ выполняются равенства: $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$

Корень из произведения

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Корень из частного

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Степень корня

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

Корень из корня

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Вторая теорема о корне из степени

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

Степень положительного числа и числа 0 с рациональным показателем

Степенью положительного числа a с рациональным показателем r, представленным в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, где $m \in N$, $n \in N$.

глава

5 Числовые последовательности

- Предмет изучения этой главы — функции, областью определения которых является множество натуральных чисел или множество, состоящее из первых n натуральных чисел. Вы изучите свойства этих функций, ознакомитесь со способами их задания и их частными видами — арифметической и геометрической прогрессиями.
- Вы научитесь находить члены прогрессий, вычислять суммы n первых их членов, записывать бесконечные периодические десятичные дроби в виде обыкновенных дробей.

§ 24 Числовые последовательности

Часто в повседневной жизни встречаются объекты, с которыми удобно обращаться, если их предварительно пронумеровать. Например, номера имеют месяцы и кварталы года, дни недели, подъезды и квартиры дома, вагоны поезда, каждому учащемуся вашего класса присвоен свой порядковый номер в классном журнале.

Объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами 1, 2, 3, ..., n, ..., образуют **последовательности**.

Так, можно говорить о последовательности страниц книги, букв слова, этажей дома и т. д.

Объекты, образующие последовательность, называют **членами последовательности**. Каждый член последовательности имеет свой номер. Например, январь — это *первый член* последовательности месяцев года, число 3 — *второй член* последовательности простых чисел. Вообще, если член последовательности имеет номер n, то его называют ***n*-м членом последовательности**.

Если членами последовательности являются числа, то такую последовательность называют **числовой**.

Приведём примеры числовых последовательностей.

1, 2, 3, 4, 5, ... — последовательность натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... — последовательность чётных чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — последовательность десятичных приближений дроби $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 — последовательность двузначных чисел, кратных 19;

–1, –2, –3, –4, –5, ... — последовательность отрицательных целых чисел.

В дальнейшем мы будем рассматривать только числовые последовательности.

Последовательности бывают **конечными и бесконечными**. Например, последовательность чётных натуральных чисел — это бесконечная последовательность, а последовательность двузначных чисел, кратных 19, — это конечная последовательность.

Для обозначения членов последовательности используют буквы с индексами:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Индекс указывает порядковый номер члена последовательности. Для обозначения самой последовательности используют записи вида (a_n), (b_n), (c_n) и т. д. Например, последовательность простых чисел можно обозначить так: (p_n). Имеем: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ и т. д.

Последовательность считают заданной, если указано правило, с помощью которого можно найти любой её член.

Если правило описано словами, то такой способ задания последовательности называют **описательным**. Приведём пример последовательности, заданной описательно.

Каждый член последовательности равен остатку от деления его номера на 3. Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, \ldots .$$

Если последовательность является конечной, то её можно задать с помощью таблицы. Например, следующая таблица задаёт последовательность кубов однозначных натуральных чисел.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Мы привели пример последовательности, заданной **табличо**.

Последовательность можно задать с помощью формулы. Например, равенство $x_n = 2^n$, где переменная n принимает все натуральные значения, задаёт последовательность (x_n) натуральных степеней числа 2. Мы задали эту последовательность с помощью **формулы *n*-го члена**. Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots .$$

Рассмотрим несколько примеров задания последовательности с помощью формулы n-го члена.

Формула $a_n = 2n - 1$ задаёт последовательность натуральных нечётных чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots .$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задаёт последовательность (y_n), в которой все члены с нечётными номерами равны -1, а с чётными номерами равны 1:

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$

Формула $c_n = 7$ задаёт последовательность (c_n), все члены которой равны числу 7:

$$7, 7, 7, 7, 7, \ldots .$$

Последовательность, все члены которой равны, называют **стационарной**.

Рассмотренные способы задания последовательностей помогают проследить связь между понятиями «функция» и «последовательность».

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество n первых натуральных чисел. Тогда функция f задаёт бесконечную последовательность $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... или конечную последовательность $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$. Можно сказать, что *бесконечная последовательность — это функция, областью определения которой является множество* $\boldsymbol{N}$, *а конечная последовательность, состоящая из* n *членов, — это функция, область определения которой — множество* n *первых натуральных чисел.* Другими словами, *бесконечная последовательность — это отображение множества* $\boldsymbol{N}$ *на некоторое непустое множество* A, *а конечная последовательность — это отображение множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *на некоторое непустое множество* B.

Например, функцию $y = x^2$, $D(y) = \boldsymbol{N}$, можно рассматривать как последовательность квадратов натуральных чисел:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots .$$

Также можно сказать, что, например, стационарная последовательность 7, 7, 7, 7, ... — это отображение множества $\boldsymbol{N}$ на множество $\{7\}$.

Нередко последовательность задают правилом, которое позволяет найти следующий член, зная предыдущий.

Рассмотрим последовательность (a_n), заданную описательно таким образом: первый член равен 1, а каждый следующий член последовательности в 3 раза больше предыдущего. Имеем:

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots .$$

Эту последовательность также можно определить с помощью таких условий:

$$a_1 = 1 \text{ и } a_{n+1} = 3a_n \text{ для любого } n \in \boldsymbol{N}.$$

Эти равенства указывают первый член последовательности и правило, с помощью которого по каждому члену последовательности можно найти следующий за ним член. Имеем:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 3a_1 = 3,$$
$$a_3 = 3a_2 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 = 27$$
и т. д.

Формулу, выражающую член последовательности через один или несколько предыдущих членов, называют **рекуррентной формулой** (от лат. *recurro* — «возвращаться»). В приведённом примере это формула $a_{n+1} = 3a_n$, где n — любое натуральное число. Условия, определяющие первый или несколько первых членов, называют **начальными условиями**. В рассматриваемом примере начальное условие — это равенство $a_1 = 1$. Способ задания последовательности с помощью начальных условий и рекуррентной формулы называют **рекуррентным способом** задания последовательности[1].

Заметим, что знание одной лишь рекуррентной формулы не позволяет задать последовательность. Должны быть ещё указаны начальные условия.

При рекуррентном способе задания последовательности первый или несколько первых членов последовательности заданы, а все остальные вычисляют один за другим. С этой точки зрения способ задания последовательности формулой n-го члена кажется более удобным: с его помощью можно сразу найти нужный член последовательности, зная лишь его номер.

Пример 1. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = 37 - 3n$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 19; 2) –7? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

Решение.

1) Если число 19 является членом данной последовательности, то существует такое натуральное значение n, при котором выполняется равенство $37 - 3n = 19$. Отсюда $3n = 18$; $n = 6$. Следовательно, число 19 является шестым членом последовательности (c_n).

2) Имеем: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Так как число $14\frac{2}{3}$ не является натуральным, то число –7 не является членом данной последовательности.

Ответ: 1) является, $n = 6$; 2) не является. ■

[1] В этой главе в записи рекуррентных формул переменная n может принимать любые натуральные значения.

Пример 2. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 15$, $a_{n+1} = 7a_n + 1$. Является ли число 1001 членом этой последовательности?

Решение. Каждый член последовательности (a_n) является целым числом, которое при делении на 7 даёт в остатке 1. Так как число 1001 делится нацело на 7, то оно не может быть членом этой последовательности.

Ответ: не является. ■

Пример 3. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = \frac{n+1}{n}$. Задайте её рекуррентно.

Решение. Имеем: $a_1 = 2$. В формуле n-го члена выразим n через a_n. Имеем: $na_n = n + 1$; $n(a_n - 1) = 1$. Так как $a_n \neq 1$, то можно записать $n = \frac{1}{a_n - 1}$.

Имеем: $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{\frac{1}{a_n - 1} + 2}{\frac{1}{a_n - 1} + 1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}$.

Ответ: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}$. ■

Пример 4. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Докажите, что эту последовательность можно задать формулой n-го члена $a_n = 2^n + 3^n$.

Решение. Доказательство проведём методом математической индукции.

При $n = 1$ получаем $a_1 = 5 = 2^1 + 3^1$, при $n = 2$ получаем $a_2 = 13 = 2^2 + 3^2$, т. е. теорема база индукции верна.

Пусть $a_k = 2^k + 3^k$ и $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$. Имеем:

$a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k = 5 \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 3^{k+1} - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 4 \cdot 2^k + 9 \cdot 3^k = 2^{k+2} + 3^{k+2}$. Тем самым доказана теорема индуктивный переход.

Следовательно, $a_n = 2^n + 3^n$ для любого натурального n. ■

Пример 5. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$. Найдите a_{1000}.

Решение. Запишем несколько первых членов последовательности:

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_6 = 1$, $a_7 = 2$.

В данной последовательности каждый член, начиная с третьего, однозначно определяется двумя предыдущими членами. Мы видим, что $a_6 = a_1$ и $a_7 = a_2$. Следовательно, не проводя дальнейших вычислений, можно сделать вывод, что $a_8 = a_3$, $a_9 = a_4$, $a_{10} = a_5$ и вообще, $a_{n+5} = a_n$ для любого натурального n. О такой последовательности говорят, что она является **периодической** с периодом, равным 5. В этой последовательности члены, номера которых сравнимы по модулю 5, равны. Отсюда $a_{1000} = a_5 = 1$.

Ответ: $a_{1000} = 1$. ■

1. Что образуют объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами?
2. Как называют объекты, образующие последовательность?
3. Как называют член последовательности, имеющий номер n?
4. Какую последовательность называют числовой?
5. В каком случае последовательность считают заданной?
6. Перечислите способы задания последовательности.
7. Поясните, что такое формула n-го члена последовательности.
8. Какова связь между понятиями «функция» и «последовательность»?
9. Поясните, что такое рекуррентная формула.

Упражнения

24.1. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 7n + 2$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 149; 2) 47? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

24.2. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = n^2 - 4$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 16; 2) 77? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

24.3. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Является ли членом этой последовательности число 999?

24.4. Последовательность (b_n) задана рекуррентно: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$. Является ли членом этой последовательности число 1024?

24.5. Сколько отрицательных членов содержит последовательность (x_n), заданная формулой n-го члена $x_n = 6n - 50$?

24.6. Найдите номер первого отрицательного члена последовательности (y_n), заданной формулой n-го члена $y_n = 38 - 3n$.

24.7. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = n^2 - 3n - 8$. Найдите номера членов этой последовательности, которые меньше 10.

24.8. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Сколько членов этой последовательности больше 16?

24.9. Подберите одну из возможных формул n-го члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) 1, 4, 9, 25, ...;

2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;

3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ...;

4) 0, 2, 0, 2, 0, ...;

5) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}$, ...;

6) $2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, 0$, ...

24.10. Подберите одну из возможных формул n-го члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;

2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$, ...;

3) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}$, ...;

4) $-1, 1, 3, 3, 3$, ...

24.11. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \left[\sqrt{a_n}\right]$. Найдите a_{1000}.

24.12. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена. Задайте её рекуррентно:

1) $a_n = 2n - 3$; 2) $a_n = \frac{n}{n+2}$; 3) $a_n = n^2$.

24.13. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена. Задайте её рекуррентно:

1) $a_n = n$; 2) $a_n = \frac{1}{n+1}$; 3) $a_n = \sqrt{n}$.

◆ ◆ ◆

24.14. Существуют ли такие значения a, при которых последовательность является стационарной:

1) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$; 2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 5$?

24.15. Найдите сто первый член последовательности (a_n), если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

24.16. Найдите сто первый член последовательности (a_n), если $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

24.17. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 25$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$. Докажите, что все члены этой последовательности при делении на 3 дают в остатке 1.

24.18. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$. Докажите, что все члены этой последовательности с нечётными номерами делятся нацело на 5.

24.19. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 8$, $a_{n+1} = 7a_n - 6$. Докажите, что все члены этой последовательности при делении на 3 дают в остатке 2.

24.20. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 29$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$. Докажите, что $a_n = 2^n + 5^n$.

24.21. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Докажите, что $a_n = 2^{n-1} + 3$.

24.22. Найдите формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентно:

1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$;

2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$;

3) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$.

24.23. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$. Докажите, что любой член этой последовательности является квадратом натурального числа.

24.24. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + n$. Докажите, что в этой последовательности все члены, кроме первого, не являются квадратами натуральных чисел.

24.25. Для последовательности (x_n) справедлива такая рекуррентная формула: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Найдите все значения x_1, при которых выполняется равенство $x_1 = x_{1000}$.

Упражнения для повторения

24.26. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ x > a \end{cases}$ содержит ровно три целых числа.

24.27. Решите неравенство $(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 6x + 5} \geqslant 0$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

О кроликах, подсолнухах, сосновых шишках и золотом сечении

Рассмотрим последовательность (u_n), заданную рекуррентно такими соотношениями:

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Запишем несколько её первых членов:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Члены этой последовательности называют **числами Фибоначчи**. Это объясняется тем, что итальянский математик и купец Леонардо Пизанский (Фибоначчи), решая популярную в XII в. задачу о численности потомства пары кроликов, первым обратил внимание на замечательные свойства этой последовательности. Изменение количества кроликов происходит по следующему правилу: каждая взрослая пара кроликов ежемесячно приносит пару крольчат, а те через месяц также начинают производить потомство. На рисунке 24.1 количество пар кроликов соответствует последовательности чисел Фибоначчи.

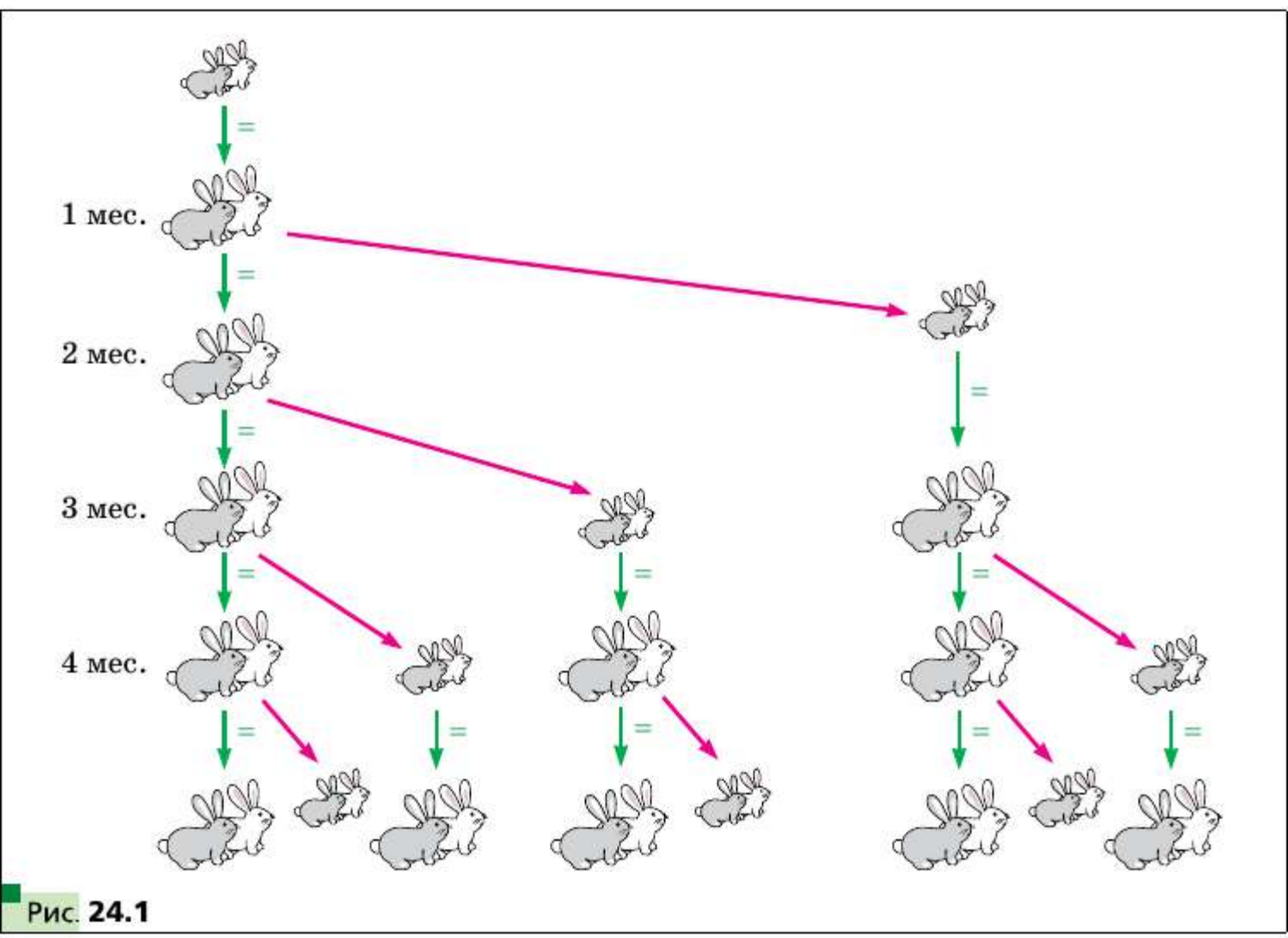


Рис. **24.1**

Числа Фибоначчи можно встретить в различных ситуациях, и даже некоторые явления природы связаны с этими числами.

Представьте себе, что вы идёте по дорожке, вымощенной квадратными плитками в один ряд, наступая каждый раз на следующую плитку или через одну. В этом случае количество способов пройти дорожку из n плиток равно n-му члену последовательности Фибоначчи (проверьте это самостоятельно, например, для случая $n = 8$).

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1170 — ок. 1250)

Итальянский математик. Путешествуя по странам Востока, ознакомился с достижениями арабских математиков и способствовал распространению этих знаний в Европе. Его основные труды «Liber Abaci» (1202) — трактат об арифметике и алгебре, «Practica Geometriae» (1220) заложили основы применения алгебраических методов в геометрии.

Если посмотреть на семена в головке подсолнуха или ананаса, то можно увидеть, что они расположены в виде двух семейств спиралей, закручивающихся в противоположных направлениях. Количества спиралей в этих семействах являются соседними членами последовательности Фибоначчи. Как правило, для подсолнуха эти числа равны 34 и 55, однако встречаются и гиганты с 89 и 144 спиралями. Подобное свойство[1] можно обнаружить в структуре сосновых шишек. То же явление наблюдается и на плодах ананаса, где спиралей обычно бывает 8 и 13.

Числа Фибоначчи обладают целым рядом интересных свойств.

Если в последовательности Фибоначчи для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ вычислить отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, то получим последовательность 1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); ... .

Эта последовательность обладает таким свойством: с возрастанием номеров её члены всё меньше и меньше отличаются от числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx$ $\approx 1{,}618$.

Ещё в давние времена с этим числом люди связывали свои представления о красоте и гармонии. Греческие скульпторы хорошо знали о соответствии правильных пропорций человеческого тела этому магиче-

[1] В ботанике такое сочетание двух семейств спиралей называют филлотаксисом.

скому числу. И не зря античные зодчие использовали его в своих бессмертных творениях. Так, отношение длины Парфенона[1] к его высоте приближённо равно 1,618. Гений эпохи Возрождения Леонардо да Винчи считал, что среди многих отношений, которые использует Творец, существует одно, единственное и неповторимое. Именно его он назвал «золотым сечением».

Рассмотрим ещё один пример. Запишем равенства:

$$1=\frac{1}{1};\ 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1};\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2};\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{5}{3};\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\frac{8}{5};$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}\ \text{и т. д.}$$

Мы видим, что правые части выписанных равенств представляют собой отношение двух соседних членов последовательности Фибоначчи.

Имеем: $1+\dfrac{1}{\frac{u_k}{u_{k-1}}}=1+\dfrac{u_{k-1}}{u_k}=\dfrac{u_k+u_{k-1}}{u_k}=\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$.

Так как справедливо равенство

$$1+\frac{1}{\frac{u_k}{u_{k-1}}}=\frac{u_{k+1}}{u_k},$$

то мы фактически методом математической индукции доказали, что

$$\underbrace{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}_{n\ \text{«красных» единиц}}\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Приведём еще несколько свойств, которыми обладают числа Фибоначчи:

1) $u_1+u_2+\ldots+u_n=u_{n+2}-1$;

2) $u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}$;

[1] Парфенон — храм в Афинах, построенный в V в. до н. э.

3) $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;

4) $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$;

5) $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1}$, $n \geqslant 2$;

6) любое натуральное число может быть представлено в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи.

Используя метод математической индукции, докажите эти свойства самостоятельно.

Французский учёный Жак Бине (1786–1856) нашёл формулу n-го члена последовательности Фибоначчи:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Трудно поверить, что эта формула задаёт натуральные числа. Тем не менее это так.

§ 25 Арифметическая прогрессия

Рассмотрим такие последовательности:

2, 7, 12, 17, 22, 27, ...;

1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; ...;

3, 1, –1, –3, –5, –7, ...

Они обладают такой характерной особенностью: *каждый следующий член последовательности получен в результате прибавления к предыдущему одного и того же числа*. Для первой последовательности это число равно 5, для второй — 0,5, для третьей равно –2.

С подобными последовательностями людям приходилось иметь дело с давних времён, когда они считали предметы парами, получая последовательность 2, 4, 6, ...; пятёрками, получая последовательность 5, 10, 15, ...; десятками, получая последовательность 10, 20, 30, ...; и т. д. Такие последовательности называют **арифметическими прогрессиями** (от лат. *progressio* — «движение вперёд»).

Определение

Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Число, равное разности последующего и предыдущего членов последовательности, называют **разностью арифметической прогрессии**

и обозначают буквой d (первой буквой латинского слова *differentia* — «разность»).

Итак, если (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d, то

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots,$$

т. е. для любого натурального n выполняется равенство $a_{n+1} - a_n = d$. Отсюда получаем рекуррентную формулу:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Следовательно, арифметическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$\boldsymbol{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}$$

Таким образом, *чтобы задать арифметическую прогрессию, надо указать её первый член и разность.*

Приведём несколько примеров.

Если $a_1 = 2$ и $d = 5$, то получим арифметическую прогрессию, приведённую в начале параграфа:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \ldots\ .$$

Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию — последовательность нечётных чисел:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots\ .$$

Стационарная последовательность является арифметической прогрессией, у которой $d = 0$. Например, для последовательности 5, 5, 5, 5, ... имеем: $a_1 = 5$, $d = 0$.

Покажем, как можно задать арифметическую прогрессию с помощью формулы n-го члена.

Из определения арифметической прогрессии (a_n) следует:

$a_2 = a_1 + d$;

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2$;

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3$;

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4$.

Приведённые примеры помогают сделать такой индуктивный вывод:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n - 1)}$$

Эту гипотезу можно доказать методом математической индукции (сделайте это самостоятельно).

Записанное равенство называют **формулой *n*-го члена арифметической прогрессии.**

Рассмотрим функцию $f(x) = kx + b$, у которой $D(f) = \boldsymbol{N}$ или $D(f) = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Она является арифметической прогрессией с разностью,

равной k. Действительно, $f(n+1) - f(n) = k(n+1) + b - (kn + b) = k$. Это означает, что последовательность $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... — арифметическая прогрессия с разностью, равной k.

Например, каждая из последовательностей, заданных формулами $a_n = 7n - 2$, $b_n = -3n + 4$, $c_n = \sqrt{2}n + 1$, является арифметической прогрессией.

Тот факт, что функция $f(x) = kx + b$, у которой $D(f) = \boldsymbol{N}$ или $D(f) = \{1, 2, ..., n\}$, является арифметической прогрессией, имеет геометрическую интерпретацию: если точки координатной плоскости лежат на невертикальной прямой и их абсциссы — последовательные натуральные числа, то их ординаты являются членами арифметической прогрессии (рис. 25.1).

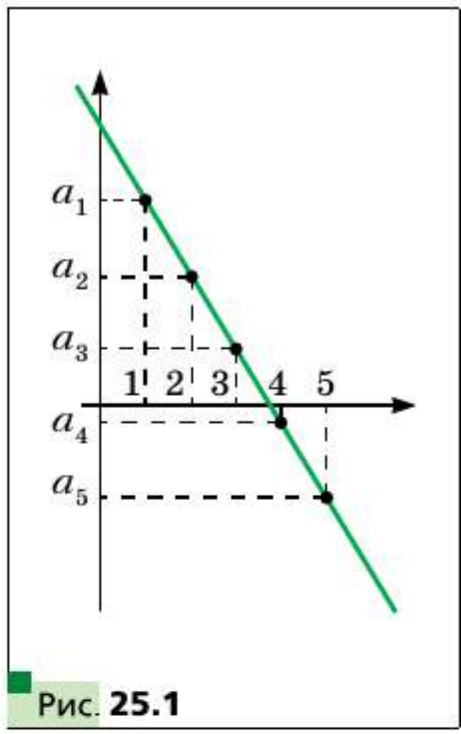


Рис. **25.1**

Из определения арифметической прогрессии следует, что при $n > 1$ выполняются равенства $a_n - a_{n-1} = d$ и $a_{n+1} - a_n = d$. Отсюда $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Тогда при $n > 1$ получаем

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Любой член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.

Верно и обратное утверждение.

Если в последовательности каждый член, кроме первого (и последнего, если последовательность конечна), равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Действительно, из равенства $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, где $n > 1$, получаем $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$; $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, т. е. разность последующего и предыдущего членов данной последовательности постоянна. Это означает, что последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия.

Доказав два взаимно обратных утверждения, тем самым мы доказали такую теорему.

Теорема 25.1

Последовательность, содержащая более двух членов, является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, кроме первого (и последнего, если последовательность конечна), равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов.

Пример 1. Члены арифметической прогрессии (a_n) — целые числа. Известно, что $a_3 \cdot a_6 = 406$ и при делении её девятого члена на четвёртый член в частном получаем 2, а в остатке 6. Найдите первый член и разность прогрессии.

Решение. Запишем: $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_6 = a_1 + 5d$, $a_9 = a_1 + 8d$. Тогда с учётом условия можно составить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 5d) = 406, \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 3d) + 6. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом подстановки. Сделайте это самостоятельно. Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = -\dfrac{79}{7}, \\ d = -\dfrac{37}{14}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Так как по условию члены последовательности (a_n) — целые числа, то искомым ответом будет $a_1 = 4$, $d = 5$.

Ответ: $a_1 = 4$, $d = 5$. ■

Пример 2. Могут ли числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

Решение. Предположим, что числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ — члены арифметической прогрессии (a_n) с разностью d $(d \neq 0)$ и соответственно равны a_n, a_m, a_k. Тогда можно записать:

$$1 = a_1 + d(n-1),$$
$$\sqrt{2} = a_1 + d(m-1),$$
$$\sqrt{3} = a_1 + d(k-1).$$

Отсюда $\sqrt{2} - 1 = d(m-n)$, $\sqrt{3} - 1 = d(k-n)$.

Так как $k \neq n$, то $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{m-n}{k-n}$.

Правая часть этого равенства является рациональным числом. Несложно показать (сделайте это самостоятельно), что левая часть равен-

ства — число иррациональное. Следовательно, полученное равенство неверно.

Таким образом, числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

Ответ: не могут. ■

1. Какую последовательность называют арифметической прогрессией?
2. Какое число называют разностью арифметической прогрессии? Как обозначают это число?
3. Как можно задать арифметическую прогрессию рекуррентно?
4. Что надо указать, чтобы задать арифметическую прогрессию?
5. Какой вид имеет формула n-го члена арифметической прогрессии?
6. Каковы необходимое и достаточное условия того, что данная последовательность, содержащая более двух членов, является арифметической прогрессией?

Упражнения

25.1. Найдите разность арифметической прогрессии (x_n), если $x_1 = 2$, $x_8 = -47$.

25.2. Найдите первый член арифметической прогрессии (y_n), если $y_{17} = 22$, а разность прогрессии $d = 0{,}5$.

25.3. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии:

1) $-5, -7, -9, -11, \ldots$;
2) $2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, \ldots$;
3) $a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \ldots$;
4) $a + 3, a + 1, a - 1, a - 3, \ldots$.

25.4. Является ли членом арифметической прогрессии (c_n):

1) число 20,4, если $c_1 = 11{,}4$, а разность прогрессии $d = 0{,}6$;
2) число 38, если $c_1 = 8$, а разность прогрессии $d = 1{,}4$?

В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

25.5. Найдите номер члена арифметической прогрессии 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., равного 13,7.

25.6. Найдите второй член арифметической прогрессии, если первый и третий члены равны соответственно -6 и 12.

25.7. Восьмой и десятый члены арифметической прогрессии равны соответственно 3,5 и 2,7. Чему равен девятый член прогрессии?

25.8. Найдите первый член арифметической прогрессии (b_n), если $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$.

25.9. Чему равна разность арифметической прогрессии (x_n), если $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?

25.10. Является ли последовательность (a_n) арифметической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $a_n = -6n + 3$; 2) $a_n = -2{,}8n$; 3) $a_n = 2n^2 - n$?

В случае утвердительного ответа укажите a_1 и разность прогрессии.

25.11. Является ли последовательность (a_n) арифметической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $a_n = 6 + 7n$; 2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$; 3) $a_n = \frac{1}{n} + 2$?

В случае утвердительного ответа укажите a_1 и разность прогрессии.

25.12. Как изменится разность конечной арифметической прогрессии, если переставить её члены в обратном порядке?

25.13. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 5,2; 4,9; 4,6; ...?

25.14. Какой номер у первого положительного члена арифметической прогрессии –10,2; –9,5; –8,8; ...?

25.15. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 7,2; 6,6; 6; ... .

25.16. Между числами –6 и 3 вставьте пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

25.17. Какие четыре числа надо вставить между числами 4 и –5, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию?

25.18. Найдите a_1 и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_3 + a_7 = 30$ и $a_6 + a_{16} = 60$; 2) $a_4 + a_{10} = 36$ и $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

25.19. Найдите a_1 и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_5 + a_{12} = 41$ и $a_{10} + a_{14} = 62$; 2) $a_7 + a_{13} = -104$ и $a_2 \cdot a_6 = -240$.

25.20. В каких случаях для членов арифметической прогрессии выполняется равенство $a_1 a_4 = a_2^2$?

25.21. Докажите, что значения выражений $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

25.22. Дана конечная арифметическая прогрессия a_1, a_2, ..., a_n. Докажите, что $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, $k \leqslant n$.

25.23. Докажите, что для арифметической прогрессии (a_n) справедливо равенство $a_n + a_k = a_{n-m} + a_{k+m}$, $n > m$.

25.24. Верно ли утверждение: если длины сторон выпуклого четырёхугольника, взятые в последовательности a, b, d и c (рис. 26.2), образуют арифметическую прогрессию, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность?

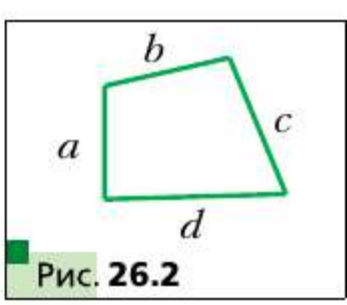


Рис. 26.2

25.25. Могут ли образовывать арифметическую прогрессию длины сторон и периметр треугольника?

25.26. Величины углов треугольника образуют арифметическую прогрессию. Какова градусная мера среднего по величине угла треугольника?

25.27. Из арифметической прогрессии исключили члены с нечётными номерами. Образуют ли оставшиеся члены арифметическую прогрессию?

25.28. Даны две бесконечные арифметические прогрессии. Если из каждого члена одной прогрессии вычесть соответствующий член другой, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

25.29. Если из арифметической прогрессии, разность которой не равна нулю, исключить её члены, номера которых кратны 3, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

25.30. Каждый член арифметической прогрессии умножили на 4. Будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

25.31. Докажите, что числа, равные соответственно суммам углов треугольника, четырёхугольника, пятиугольника и т. д., образуют арифметическую прогрессию.

25.32. При каком значении x значения выражений $x^2 - 4$, $5x + 3$ и $3x + 2$ являются последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

25.33. При каком значении y значения выражений $y^2 + 1$, $y^2 + y$ и $8y - 10$ являются последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

25.34. При каком значении y значения выражений $y^2 - 2y$, $3y + 5$, $4y + 13$ и $2y^2 - y + 25$ являются последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

25.35. При каком значении x значения выражений $3x + 4$, $2x + 3$, x^2 и $2x^2 + x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

◆ ◆ ◆

25.36. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой $a_k = m$, $a_m = k$ $(m \neq k)$. Найдите a_{k+m}.

25.37. Докажите, что если положительные числа a, b и c — три последовательных члена арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

25.38. Докажите, что если значения выражений $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{a+b}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то значения выражений a^2, b^2 и c^2 также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

25.39. Докажите, что если числа a, b, c — три последовательных члена арифметической прогрессии, то значения выражений $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

25.40. Найдите все арифметические прогрессии с разностью 10, состоящие из простых чисел и имеющие не менее трёх членов.

25.41. Найдите все арифметические прогрессии с разностью 2, состоящие из простых чисел и имеющие не менее трёх членов.

25.42. Известно, что бесконечная арифметическая прогрессия, членами которой являются натуральные числа, содержит квадрат натурального числа. Докажите, что эта прогрессия содержит бесконечно много членов, являющихся квадратами натуральных чисел.

25.43. Числа a, b, a^2 являются членами бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел. Известно, что $a < b$. Докажите, что число b^2 является членом этой прогрессии.

25.44. Докажите, что в бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, найдутся два члена, имеющие одинаковую сумму цифр.

25.45. Докажите, что арифметическая прогрессия (a_n), где $a_n = 3n + 2$, содержит бесконечно много простых чисел[1].

25.46. Существует ли нестационарная бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из простых чисел?

Упражнения для повторения

25.47. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax + 2y = 3, \\ 8x + ay = a + 2 \end{cases}$ не имеет решений?

25.48. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x^2}{9 + x^4}$.

[1] Эта задача является частным случаем теоремы Дирихле об арифметической прогрессии: ***арифметическая прогрессия, у которой первый член и разность являются взаимно простыми натуральными числами, содержит бесконечно много простых чисел.***

§ 26 Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Рассмотрим конечную арифметическую прогрессию

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Сумму членов этой прогрессии обозначим S_n.

Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Выведем формулу для нахождения этой суммы.

Вначале рассмотрим задачу, решение которой подскажет, как вывести искомую формулу.

Рассмотрим арифметическую прогрессию

$$1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100$$

и найдём сумму её членов.

Запишем искомую сумму двумя способами:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100;$$
$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$2S_{100} = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{\text{100 слагаемых}}$$

Отсюда $2S_{100} = 101 \cdot 100$; $S_{100} = 5050$.

Рассказывают, что выдающийся немецкий математик К. Гаусс придумал такое решение в юном возрасте.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Немецкий математик, астроном и физик. Его работы оказали огромное влияние на развитие почти всех основных разделов математики: алгебры, дифференциальной и неевклидовой геометрии, математического анализа, теории вероятностей, теории функций комплексного переменного.

Воспользуемся описанным приёмом для нахождения суммы (1).

Запишем сумму S_n двумя способами. Сначала запишем сумму, первое слагаемое которой равно a_1, а каждое следующее слагаемое получено из предыдущего прибавлением разности d. Затем запишем сумму, первое слагаемое которой равно a_n, а каждое следующее слагаемое получено из предыдущего вычитанием разности d. Имеем:

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$,

$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$.

Сложив эти равенства, получим:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$.

Выражение, записанное в правой части последнего равенства, является суммой n слагаемых, каждое из которых равно $a_1 + a_n$.

Тогда $2S_n = (a_1 + a_n)n$. Отсюда

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Полученное равенство называют **формулой суммы *n* первых членов арифметической прогрессии.**

Эту формулу также можно получить, воспользовавшись задачей 25.22 (сделайте это самостоятельно).

Подставив в эту формулу вместо a_n выражение $a_1 + d(n-1)$, получим: $S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Отсюда

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$$

Последней формулой удобно пользоваться тогда, когда заданы первый член и разность прогрессии.

Пример 1. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 6.

Решение. Данные числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой $a_1 = 102$, а разность $d = 6$. Тогда $a_n = 102 + 6(n-1) = 6n + 96$. Найдём количество членов этой прогрессии. Так как $a_n < 1000$, то искомое количество — это наибольшее натуральное решение неравенства $6n + 96 < 1000$. Имеем:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $n = 150$. Теперь найдём искомую сумму:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150-1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

Ответ: 82 350. ■

Пример 2. Сумма семидесяти пяти первых членов арифметической прогрессии равна 450. Найдите тридцать восьмой член прогрессии.

Решение. Пусть первый член прогрессии и её разность равны a_1 и d соответственно. Тогда можно записать $S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450$. Поскольку $a_{38} = a_1 + 37d$, то искомый член равен $a_{38} = 450 : 75 = 6$.

Ответ: 6. ■

1. Как найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если известны её первый и последний члены?

2. Как найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если известны её первый член и разность?

Упражнения

26.1. Места в цирке расположены так, что в первом ряду каждого сектора 6 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в секторе, если в нём 16 рядов?

26.2. Дмитрий взял в библиотеке книгу. За первый день он прочитал 40 страниц, а за каждый следующий день читал на 10 страниц больше, чем за предыдущий. Сколько страниц в книге, если Дмитрий прочитал её за 7 дней?

26.3. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = -4n + 1$. Найдите сумму тридцати двух первых членов прогрессии.

26.4. Арифметическая прогрессия (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = 5n - 2$. Найдите сумму двадцати шести первых членов прогрессии.

26.5. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только количество целых часов от 1 до 12?

26.6. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ и $a_5 + a_{22} = 101$.

26.7. Найдите сумму тридцати трёх первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ и $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.

26.8. Чему равна сумма n первых:

1) натуральных чисел;

2) нечётных натуральных чисел?

26.9. Чему равна сумма n первых чётных натуральных чисел?

26.10. Сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 3n^2 + 5n$. Найдите три первых члена этой прогрессии.

26.11. Сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 9n - 2n^2$. Найдите седьмой член этой прогрессии.

26.12. (*Старинная египетская задача.*) Сто мер хлеба надо разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвёртый больше третьего и пятый больше четвёртого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше, чем трое последних. Сколько надо дать каждому?

26.13. Какое натуральное число равно сумме всех предшествующих ему натуральных чисел?

26.14. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-6{,}2;\ -5{,}9;\ -5{,}6;\ \ldots$.

26.15. Найдите сумму всех положительных членов арифметической прогрессии $8{,}4;\ 7{,}8;\ 7{,}2;\ \ldots$.

26.16. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 5 и не больших 240.

26.17. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и меньших 130.

26.18. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 12 и меньших 200.

26.19. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 8.

26.20. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 7.

26.21. Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 8,5, а сумма шестнадцати первых членов составляет 172.

26.22. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна -4, а сумма девяти первых членов составляет -54.

26.23. Первый член арифметической прогрессии равен -9, а разность равна 6. Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равной 960?

26.24. Какое наименьшее количество последовательных нечётных натуральных чисел, начиная с числа 7, надо сложить, чтобы получить сумму, большую чем 315?

26.25. Может ли сумма каких-либо пяти последовательных членов арифметической прогрессии 3, 7, 11, ... быть равной 135? В случае утвердительного ответа найдите эти члены.

26.26. Может ли сумма каких-либо четырёх последовательных членов арифметической прогрессии 2, 8, 14, ... быть равной 176? В случае утвердительного ответа найдите эти члены.

26.27. При свободном падении (без учёта сопротивления воздуха) тело за первую секунду проходит 4,9 м, а за каждую следующую — на 9,8 м больше, чем за предыдущую. Найдите время падения тела с высоты 490 м.

26.28. Сумма нечётных номеров страниц книги является нечётным числом, большим 400 и меньшим 500. Сколько страниц в книге?

26.29. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с восьмого по двадцать шестой включительно, если первый член прогрессии равен 24, а разность прогрессии равна –8.

26.30. Найдите сумму членов арифметической прогрессии (x_n) с десятого по двадцать пятый включительно, если $x_1 = -3$ и $x_{11} = 12$.

26.31. Первый член арифметической прогрессии равен 100, а сумма шести первых членов в 5 раз больше суммы следующих шести членов. Чему равна разность прогрессии?

26.32. Разность арифметической прогрессии равна 28, а сумма пяти первых членов в 4 раза меньше суммы следующих шести членов. Чему равен первый член прогрессии?

26.33. Двенадцатый член арифметической прогрессии равен 30. Найдите сумму двадцати трёх первых членов прогрессии.

26.34. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$.

26.35. Решите уравнение:

1) $7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1) = 480$, где n — натуральное число;

2) $5 + 8 + 11 + \ldots + x = 124$, где x — натуральное число.

26.36. Решите уравнение:

1) $11 + 19 + 27 + \ldots + (8n + 3) = 470$, где n — натуральное число;

2) $1 + 5 + 9 + \ldots + x = 630$, где x — натуральное число.

26.37. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой среднее арифметическое n первых членов при любом n равно их количеству.

◆ ◆ ◆

26.38. (*Задача Гипсикла Александрийского*[1].) Докажите, что в арифметической прогрессии с чётным количеством членов, состоящей из целых чисел, сумма второй половины больше суммы первой половины на число, кратное квадрату половины количества членов.

[1] Гипсикл Александрийский (II в. до н. э.) — древнегреческий учёный, автор XIV книги «Начал» Евклида.

26.39. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5.

26.40. В арифметической прогрессии $S_m = S_n$, $m \neq n$. Найдите S_{m+n}.

26.41. В арифметической прогрессии $S_n = m$, $S_m = n$, $m \neq n$. Найдите S_{m+n}.

26.42. В конечной арифметической прогрессии нечётное количество членов. Сумма членов, стоящих на местах с чётными номерами, равна сумме членов, стоящих на местах с нечётными номерами. Найдите сумму всех членов этой прогрессии.

26.43. В баскетбольном турнире, проходившем в один круг, участвовали n команд. После окончания турнира оказалось, что очки, набранные командами, образуют нестационарную арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место, если за победу в каждой встрече команда получала 2 очка, за поражение очки не начислялись, а игр, сыгранных вничью, в баскетболе нет?

Упражнения для повторения

26.44. Известно, что целое число n не кратно 3. Докажите, что значение выражения $n^2 + 8$ кратно 3.

26.45. Найдите решения неравенства $(a^2 - 1)\,x \leqslant a - 1$ в зависимости от значения параметра a.

§ 27 Геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательности:

1, 3, 9, 27, 81, 243, ...,

2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ...,

5; –0,5; 0,05; –0,005; 0,0005; ... .

Они обладают такой характерной особенностью: *каждый следующий член последовательности получен в результате умножения предыдущего члена на одно и то же число*. Для первой последовательности это число равно 3, для второй это число равно $\frac{1}{2}$, для третьей это число равно –0,1.

Такие последовательности называют **геометрическими прогрессиями**.

Определение

Геометрической прогрессией называют последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Число, равное отношению последующего и предыдущего членов последовательности, называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначают буквой q (первой буквой французского слова *quotient* — «частное»).

Итак, если (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots,$$

т. е. для любого натурального n выполняется равенство $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$b_{n+1} = b_n q.$$

Следовательно, геометрическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$\boldsymbol{b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n q}$$

Таким образом, *чтобы задать геометрическую прогрессию, надо указать её первый член и знаменатель.*

Приведём несколько примеров.

Если $b_1 = 1$ и $q = 3$, то получим геометрическую прогрессию, приведённую в начале параграфа:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots .$$

Если $b_1 = 2$ и $q = 2$, то получим геометрическую прогрессию — последовательность натуральных степеней числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

Заметим, что геометрическая прогрессия со знаменателем, равным 1, является стационарной последовательностью. Так, последовательность 5, 5, 5, 5, ... является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 5$, $q = 1$. Вместе с тем эту последовательность можно рассматривать как арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 5$, $d = 0$.

Вообще, любая стационарная последовательность, все члены которой отличны от нуля, является одновременно и арифметической и геометрической прогрессией. Стационарная последовательность 0, 0, 0, 0, ... является только арифметической прогрессией.

Покажем, как можно задать геометрическую прогрессию с помощью формулы n-го члена.

Из определения геометрической прогрессии следует:

$b_2 = b_1 \cdot q$;

$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2$;

$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3$;

$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4$.

Приведённые примеры помогают сделать такой индуктивный вывод:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Эту гипотезу можно доказать методом математической индукции (сделайте это самостоятельно).

Записанное равенство называют **формулой n-го члена геометрической прогрессии.**

Установим важное свойство членов геометрической прогрессии (b_n).

Из определения геометрической прогрессии следует, что при $n > 1$ выполняются равенства $b_n = b_{n-1} q$ и $b_{n+1} = b_n q$. Отсюда $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда при $n > 1$ получаем:

$$\boldsymbol{b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}}$$

Квадрат любого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего, если прогрессия конечна), равен произведению двух соседних с ним членов.

Верно и обратное утверждение: ***если последовательность (b_n) отличных от нуля чисел обладает таким свойством, что $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ при любом $n \geqslant 2$, то эта последовательность является геометрической прогрессией.***

Действительно, из равенства $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ с учётом того, что $b_{n-1} \neq 0$, $b_n \neq 0$, $b_{n+1} \neq 0$, можно записать $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, т. е. отношение последующего члена данной последовательности к предыдущему является постоянным. Это означает, что последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия.

Доказав два взаимно обратных утверждения, тем самым мы доказали такую теорему.

Теорема 27.1

Последовательность (b_n), содержащая более двух членов, все члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n \geqslant 2$ выполняется равенство $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.

Если все члены геометрической прогрессии (b_n) положительны, то можно записать:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Следовательно, каждый член такой последовательности, кроме первого (и последнего, если последовательность конечна), является средним геометрическим двух соседних с ним членов.

Рассмотрим две последовательности.

Арифметическая прогрессия (a_n), у которой $a_1 = 1$, $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots .$$

Геометрическая прогрессия (b_n), у которой $b_1 = 1$, $q = 2$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

У этих прогрессий равны первые члены. Обе эти последовательности конструируются с помощью одного и того же числа 2 ($d = q = 2$). Вместе с тем, сравнивая соответствующие члены этих последовательностей, мы видим, что геометрическая прогрессия «растёт» гораздо быстрее, чем арифметическая. Например, в первой последовательности $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, во второй $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\,288$.

Вы знаете, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две. Поэтому становится понятным, почему так быстро возрастает численность колонии бактерий, если их поместить в благоприятную среду.

Возможно, с этим примером связано то, что нередко в повседневной жизни, когда хотят подчеркнуть быстрый рост какой-либо величины, говорят «растёт в геометрической прогрессии».

Пример 1. Найдите четвёртый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Решение. По свойству геометрической прогрессии $b_4^2 = b_3b_5$, отсюда $b_4 = \sqrt{b_3b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ или $b_4 = -\sqrt{b_3b_5} = -42$.

Если $b_4 = 42$, то знаменатель прогрессии $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; если $b_4 = -42$, то $q = -\frac{7}{6}$.

Ответ: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ или $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$. ■

Пример 2. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 + b_6 = 504$ и $b_4 - b_5 + b_6 = 378$.

Решение. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. С учётом условия получаем систему двух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1q^2 + b_1q^5 = 504, \\ b_1q^3 - b_1q^4 + b_1q^5 = 378. \end{cases}$$

Поделим почленно левые и правые части уравнений системы:

$$\frac{b_1q^2(1+q^3)}{b_1q^3(1-q+q^2)} = \frac{504}{378}.$$

Далее имеем:

$$\frac{b_1q^2(1+q)(1-q+q^2)}{b_1q^3(1-q+q^2)} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1+q}{q} = \frac{4}{3};$$

$$4q = 3 + 3q;$$

$$q = 3.$$

Подставив значение q в первое уравнение системы, получаем: $9b_1 + 243b_1 = 504$; $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Ответ: $b_1 = 2$, $q = 3$. ■

Пример 3. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_{10} = 2$. Найдите произведение девятнадцати первых членов этой прогрессии.

Решение. Имеем: $b_1b_2b_3 \cdot \ldots \cdot b_{19} = b_1 \cdot b_1q \cdot b_1q^2 \cdot \ldots \cdot b_1q^{18} =$

$$= b_1^{19}q^{1+2+\ldots+18} = b_1^{19} \cdot q^{\frac{(1+18)\cdot 18}{2}} = b_1^{19} \cdot q^{19\cdot 9} = (b_1q^9)^{19} = (b_{10})^{19} = 2^{19}.$$

Ответ: 2^{19}. ■

Пример 4. Найдите все тройки чисел, которые образуют геометрическую прогрессию и обладают такими свойствами: сумма этих чисел равна 63, а если к этим числам прибавить соответственно 7, 18 и 2, то будет получена арифметическая прогрессия.

Решение. Искомые числа запишем так: a, aq, aq^2. Тогда числа $a+7$, $aq+18$, aq^2+2 образуют арифметическую прогрессию. Отсюда $2(aq+18) = a+7+aq^2+2$. С учётом условия получаем систему:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 63, \\ a + 7 + aq^2 + 2 = 2(aq+18). \end{cases} \text{ Отсюда } \begin{cases} a + aq + aq^2 = 63, \\ a - 2aq + aq^2 = 27. \end{cases}$$

Поделим почленно левые и правые части уравнений системы. Получим: $\frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\frac{7}{3}$. Решая это уравнение, получим $q=4$ или $q=\frac{1}{4}$.

Если $q=4$, то $a=3$; если $q=\frac{1}{4}$, то $a=48$.

Ответ: 3, 12, 48 или 48, 12, 3. ■

1. Какую последовательность называют геометрической прогрессией?
2. Какое число называют знаменателем геометрической прогрессии?
3. Какой вид имеет формула n-го члена геометрической прогрессии?
4. Каковы необходимое и достаточное условия того, что данная последовательность, содержащая более двух членов, является геометрической прогрессией?

Упражнения

27.1. Последовательность (b_n) такова, что $b_1=8$, $b_{n+1}=-b_n$. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией?

27.2. Найдите знаменатель и пятый член геометрической прогрессии $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{1}{6}, \ldots$.

27.3. Найдите знаменатель и шестой член геометрической прогрессии 18, 12, 8, ...

27.4. Докажите, что если последовательность (x_n) — геометрическая прогрессия, то $x_3x_{13}=x_5x_{11}$.

27.5. Докажите, что если последовательность (y_n) — геометрическая прогрессия, то $y_4y_{21}=y_8y_{17}$.

27.6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1=\frac{1}{2}$, $b_8=64$; 2) $b_6=75$, $b_8=27$.

27.7. Найдите первый член геометрической прогрессии (c_n), если:

1) $c_4=\frac{1}{98}$, а знаменатель $q=\frac{2}{7}$; 2) $c_6=100$, $c_9=100\,000$.

27.8. Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... Найдите номер этого члена.

27.9. Число 96 является членом геометрической прогрессии $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$. Найдите номер этого члена.

27.10. Какие два числа надо вставить между числами 6 и 750, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

27.11. Какие четыре числа надо вставить между числами 0,5 и 16, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

27.12. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией? В случае утвердительного ответа укажите её первый член и знаменатель.

27.13. Докажите, что последовательность (x_n), заданная формулой n-го члена $x_n = 7^{n+1}$, является геометрической прогрессией, и укажите её первый член и знаменатель.

27.14. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией. Найдите:

1) b_5, если $b_4 = 9$, $b_6 = 25$;

2) b_{17}, если $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$.

27.15. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией. Найдите b_{20}, если $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$.

27.16. Второй член геометрической прогрессии равен 6. Найдите произведение трёх первых членов этой прогрессии.

27.17. Третий член геометрической прогрессии равен 3. Найдите произведение пяти первых членов этой прогрессии.

27.18. Дана конечная геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Докажите, что $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$, $k \leqslant n$.

27.19. Докажите, что для геометрической прогрессии (b_n) справедливо равенство:

$$b_n \cdot b_k = b_{n+m} \cdot b_{k-m}, \quad k > m.$$

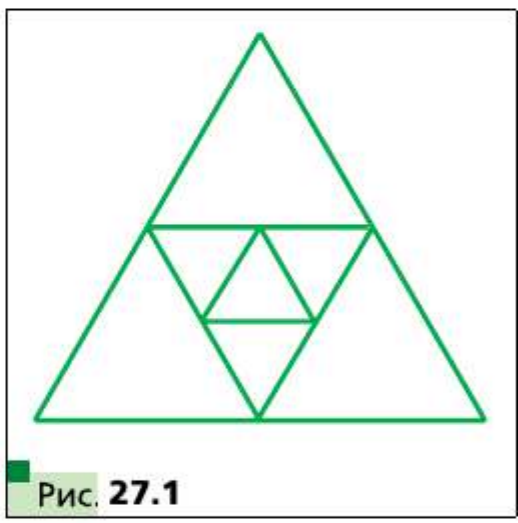


Рис. **27.1**

27.20. В правильный треугольник со стороной a последовательно вписаны треугольники так, что вершины каждого следующего треугольника являются серединами сторон предыдущего (рис. 27.1). Докажите, что периметры этих треугольников образуют геометрическую прогрессию, и запишите формулу n-го члена этой прогрессии.

27.21. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_1, b_3, \ldots, b_{2n-1}$;

2) $2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_n$;

3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n$;

4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}$?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

27.22. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

1) $b_2, b_4, \ldots, b_{2n}$; 2) $b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, \ldots, b_{n-2}b_n$?

В случае утвердительного ответа укажите знаменатель прогрессии.

27.23. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_5 = 3b_3$ и $b_6 - b_2 = 48$; 2) $b_5 - b_4 = 168$ и $b_3 + b_4 = -28$.

27.24. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_4 - b_2 = 30$ и $b_4 - b_3 = 24$; 2) $b_2 - b_5 = 78$ и $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

27.25. При каком значении x значения выражений $2x + 1$, $x + 5$ и $x + 11$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

27.26. При каком значении x значения выражений $x + 6$, $x + 2$ и $3x - 4$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

27.27. Найдите геометрическую прогрессию, содержащую шесть членов, если сумма трёх первых её членов равна 168, а сумма трёх последних равна 21.

27.28. Сумма трёх положительных чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 3 и 9, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

27.29. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 30. Если из первого числа вычесть 5, из второго вычесть 4, а третье оставить без изменений, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

27.30. Сумма трёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 65. Если из первого из этих чисел вычесть 1, второе оставить без изменений, а из третьего вычесть 19, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

27.31. Сумма трёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

◆ ◆ ◆

27.32. Найдите три числа, образующие геометрическую прогрессию, если известно, что сумма их равна 26, а сумма квадратов этих чисел равна 364.

27.33. Найдите четыре числа, из которых первые три образуют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, причём сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

27.34. Найдите четыре числа, образующие арифметическую прогрессию и обладающие таким свойством: если из второго числа вычесть 2, а к четвёртому прибавить 14, то будет получена геометрическая прогрессия.

Упражнения для повторения

27.35. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax + y = 2, \\ 9x + ay = 6 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

27.36. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют равенству:

$$\sqrt{(x-3)(y+2)} = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{-y-2}.$$

§ 28 Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Рассмотрим конечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$.

Сумму членов этой прогрессии обозначим S_n.

Имеем:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Выведем формулу для нахождения этой суммы.

Сначала рассмотрим задачу, решение которой подскажет, как вывести формулу (1).

Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$ и найдём сумму её членов S_{64}:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Умножим обе части записанного равенства на знаменатель прогрессии — число 2:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Найдём разность $2S_{64} - S_{64}$:

$$\begin{array}{rccccccc} 2S_{64} = & & 2 & +2^2 & +2^3 & + \ldots & +2^{63} & +2^{64} \\ -\quad S_{64} = & 1 & +2 & +2^2 & +2^3 & + \ldots & +2^{63} & \\ \hline 2S_{64} - S_{64} = & -1 & +0 & +0 & +0 & + \ldots & +0 & +2^{64} \end{array}$$

Отсюда $S_{64} = 2^{64} - 1$.

У вас может возникнуть вопрос: почему в качестве примера мы выбрали именно прогрессию $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$?

С этой последовательностью связана старинная легенда. Индийский мудрец, придумавший шахматы, попросил у раджи за своё изобретение скромное на первый взгляд вознаграждение: за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зёрнышко, за вторую — 2, за третью — 4 и т. д., т. е. за каждую следующую клетку вдвое больше, чем за предыдущую.

Понятно, что общее количество зёрен, которое попросил изобретатель, равно $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Богатый раджа был потрясён, когда узнал, что он не в состоянии удовлетворить «скромное» желание мудреца. Дело в том, что значение выражения $2^{64} - 1$ равно 18 446 744 073 709 551 615.

Чтобы осознать, насколько велико это число, представим, что зерно хранят в амбаре площадью 12 га. Тогда его высота была бы больше расстояния от Земли до Солнца.

Воспользуемся описанным приёмом для нахождения суммы (1).

Запишем равенство (1) так:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Найдём разность $S_nq - S_n$:

$$\begin{array}{rccccccc} S_nq = & & b_1q & +b_1q^2 & +b_1q^3 & +\ldots & +b_1q^{n-1} & +b_1q^n \\ \underline{-\quad S_n = } & b_1 & +b_1q & +b_1q^2 & +b_1q^3 & +\ldots & +b_1q^{n-1} & \\ S_nq - S_n = & -b_1 & +0 & +0 & +0 & +\ldots & +0 & +b_1q^n \end{array}$$

Следовательно, $S_nq - S_n = b_1q^n - b_1$. Отсюда $S_n(q-1) = b_1(q^n - 1)$.

При $q \neq 1$ получаем:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Это равенство называют **формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии** со знаменателем, не равным 1.

Заметим, что полученную формулу можно доказать иначе, воспользовавшись формулой разложения на множители двучлена $q^n - 1$, $n \in N$. Сделайте это самостоятельно.

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену. Тогда

$$\boldsymbol{S_n = nb_1}$$

Пример. Сумму n первых членов геометрической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 10(2^n - 1)$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

Решение. Пусть b_1 — первый член данной прогрессии, q — её знаменатель. Тогда $b_1 = S_1 = 10(2 - 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10(2^2 - 1) = 30$. Отсюда $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \dfrac{b_2}{b_1} = 2$.

Ответ: $b_1 = 10$, $q = 2$. ■

1. Как найти сумму n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем, отличным от единицы?

2. Чему равна сумма n первых членов геометрической прогрессии, знаменатель которой равен единице?

Упражнения

28.1. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии (c_n), если:

1) $c_4 = 216$, а знаменатель прогрессии $q = -3$;

2) $c_1 = 5\sqrt{5}$; $c_5 = 125\sqrt{5}$, а знаменатель прогрессии $q > 0$.

28.2. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии (x_n), если $x_3 = 24$, $x_8 = 768$.

28.3. Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Найдите сумму пяти первых членов прогрессии.

28.4. Геометрическая прогрессия (y_n) задана формулой n-го члена $y_n = \dfrac{(-2)^{n+1}}{20}$. Найдите сумму десяти первых членов прогрессии.

28.5. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\dfrac{2}{3}$, а сумма четырёх первых членов равна 65. Найдите первый член прогрессии.

28.6. Сумма трёх первых членов геометрической прогрессии равна 516, а первый член равен 12. Найдите знаменатель прогрессии.

28.7. (*Задача из «Теоретического и практического курса чистой математики» Е.Д. Войтяховского*[1].) Воину дана награда за первую рану 1 копейка, за вторую — 2 копейки, за третью — 4 копейки и т. д. После подсчёта оказалось, что воин получил награду в сумме 655 рублей 35 копеек. Спрашивается количество его ран.

[1] Ефим Дмитриевич Войтяховский (ум. около 1812) — российский математик-педагог. Его «Теоретический и практический курс чистой математики» выдержал много изданий и в течение 40 лет был одним из самых распространённых пособий для школ того времени.

28.8. Сумма членов конечной геометрической прогрессии равна 605. Найдите количество членов прогрессии, если её первый член $b_1 = 5$, а знаменатель прогрессии $q = 3$.

◆ ◆

28.9. Сумму n первых членов некоторой геометрической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 4(3^n - 1)$. Найдите третий член этой прогрессии.

28.10. Сумму n первых членов некоторой геометрической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$. Найдите четвёртый член этой прогрессии.

28.11. Найдите сумму квадратов шести первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $2\sqrt{3}$, а знаменатель равен $\sqrt{3}$.

28.12. Найдите сумму кубов четырёх первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 3$ и $b_2 = -6$.

28.13. Геометрическая прогрессия содержит $2n$ членов. Сумма членов, имеющих чётные номера, равна A, а сумма членов, имеющих нечётные номера, равна B. Найдите знаменатель прогрессии.

28.14. Докажите, что для членов геометрической прогрессии (b_n) выполняется равенство $b_2 + b_4 + b_6 + \ldots + b_{2n} = \frac{q}{1+q} S_{2n}$.

28.15. Найдите сумму $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

◆ ◆ ◆

28.16. Найдите количество членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = -\frac{1}{2}$, первый член $b_1 = 256$, а сумма всех членов $S_n = 170$.

28.17. Найдите количество членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = 3$, последний член $c_n = 162$, а сумма всех членов $S_n = 242$.

28.18. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — последовательные члены геометрической прогрессии, S_n — сумма её n первых членов. Докажите, что $S_n = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$.

28.19. Найдите произведение 100 первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = A$, $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{100}} = B$.

28.20. Постройте график уравнения $\dfrac{(y^2-4)(y+x)}{x^2-1}=0$.

28.21. Найдите решения неравенства $\sqrt{x-a}\,(4x-11)\geqslant 0$ в зависимости от значения параметра a.

§ 29 Представление о пределе последовательности. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше единицы

Рассмотрим последовательность (a_n), заданную формулой n-го члена $a_n=\dfrac{n}{n+1}$.

Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \dots .$$

Если члены этой последовательности изображать точками на координатной прямой, то эти точки будут располагаться всё ближе и ближе к точке с координатой 1 (рис. 29.1).

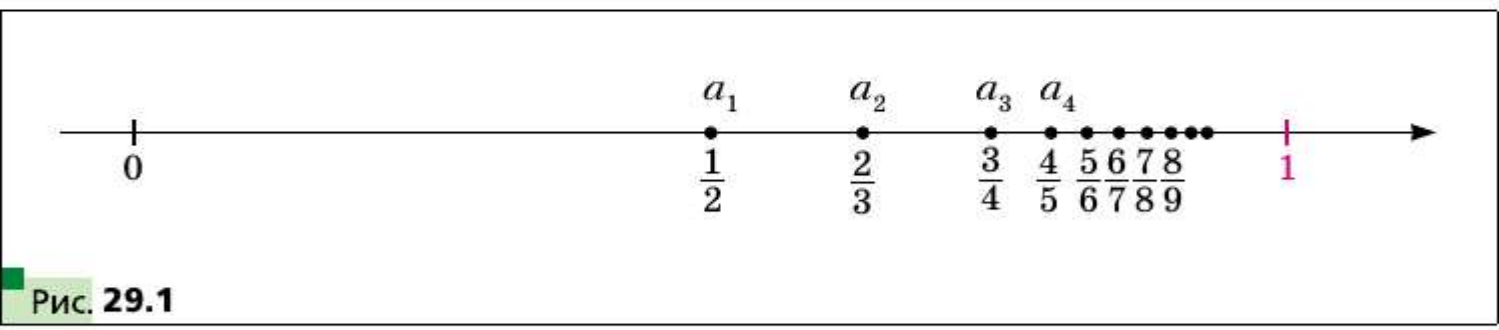


Рис. **29.1**

Говорят, что с увеличением номера n члены последовательности (a_n) **стремятся к числу** 1.

Иными словами, с увеличением номера n разность $|a_n-1|$ становится всё меньшей и меньшей. Например, $|a_n-1|<0{,}1$ при $n\geqslant 10$, $|a_n-1|<0{,}0001$ при $n\geqslant 10\,000$ и т. д. Вообще, начиная с некоторого номера n, разность $|a_n-1|$ становится *меньше любого заранее заданного положительного числа*.

В этом случае говорят, что число 1 является **пределом последовательности** a_n, и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ (здесь lim — это начальные буквы французского слова *limite* — «предел»). Также можно записать, что

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$. Иногда используют и такое обозначение: $\dfrac{n}{n+1}\to 1$ при $n\to\infty$.

Последовательность, имеющую предел, называют **сходящейся**. Последовательность с n-м членом $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ является ещё одним примером сходящейся последовательности: с увеличением номера n члены этой последовательности стремятся к числу 0, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

Не любая последовательность является сходящейся. Например, последовательность натуральных чисел не является сходящейся. Также не является сходящейся последовательность (a_n), где $a_n=(-1)^n$. Для этих последовательностей нельзя указать число, к которому стремятся члены последовательности с увеличением номера члена последовательности.

До сих пор мы рассматривали суммы, состоящие из конечного количества слагаемых. Однако при решении некоторых задач приходится рассматривать суммы с бесконечным количеством слагаемых.

Даже само словосочетание «сумма бесконечного количества слагаемых» может вызывать недоумение: ведь нельзя сложить бесконечно много чисел — такой процесс никогда не завершится.

Проиллюстрируем на примере, как в математике решают такую проблему.

Рассмотрим квадрат со стороной 1 и разделим его на две равные части. Одну из частей закрасим, а незакрашенную вновь разделим на две равные части. Одну из них закрасим, а другую разделим на две равные части и т. д. (рис. 29.2).

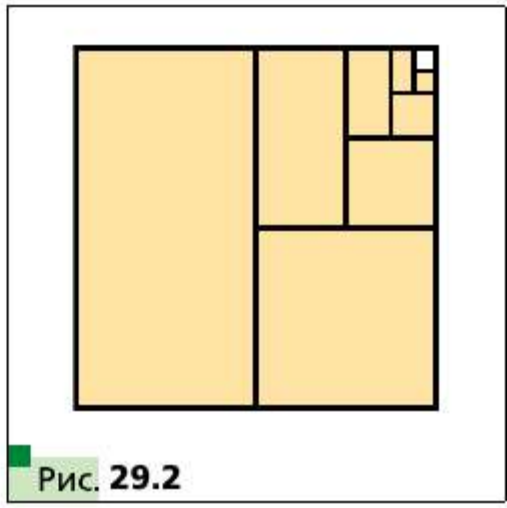


Рис. **29.2**

После первого шага площадь закрашенной фигуры будет равна $S_1=\dfrac{1}{2}$.

После второго шага: $S_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}$.

После третьего шага: $S_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}$.

...

После n-го шага: $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$.

Получили последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, устанавливаем, что после n-го шага площадь закрашенной фигуры будет равна

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Так как площадь квадрата равна 1, то из этой формулы следует, что площадь незакрашенной части равна $\frac{1}{2^n}$.

Действуя по описанной схеме, мы никогда не сможем закрасить квадрат целиком. Но чем больше таких шагов мы сделаем, тем меньше площадь закрашенной части будет отличаться от площади данного квадрата, а площадь незакрашенной части всё меньше будет отличаться от нуля.

Этот факт подтверждается тем, что для последовательности (S_n), заданной формулой $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Это означает, что сумма n первых членов геометрической прогрессии $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... при неограниченном увеличении n стремится к числу 1. Поэтому целесообразно договориться считать число 1 **суммой бесконечной геометрической прогрессии** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... Записывают:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1.$$

Обобщим этот пример.

Рассмотрим произвольную бесконечную геометрическую прогрессию b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ..., у которой $|q| < 1$.

Сумма n первых её членов вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Запишем:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

При $|q| < 1$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Этот интуитивно понятный факт примем без доказательства. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n = 0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} q^n\right) = \frac{b_1}{1 - q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ **называют суммой бесконечной геометрической прогрессии** (b_n), у которой $|q| < 1$, и записывают:

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \frac{b_1}{1-q}.$$

Если сумму бесконечной геометрической прогрессии обозначить буквой S, то можно записать такую формулу:

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ..., у которой $q = 2$, т. е. $|q| > 1$.

В предыдущем параграфе мы убедились, что уже сумма её первых 64 членов — огромное число. Понятно, что при неограниченном увеличении n сумма n первых членов этой прогрессии не стремится ни к какому числу. В этом случае говорят, что рассматриваемая бесконечная прогрессия суммы не имеет. Вообще, о сумме бесконечной геометрической прогрессии можно говорить только тогда, когда $|q| < 1$.

Рассмотрим бесконечную последовательность 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, ... Выражение вида $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ **называют гармоническим рядом.** Многоточие в конце указывает на то, что выражение не имеет последнего слагаемого, за каждым слагаемым всегда стоит следующее.

Заметим, что члены последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)$ с увеличением n становятся всё меньше и меньше. Может возникнуть гипотеза, что с неограниченным увеличением n сумма n первых членов этой последовательности стремится к некоторому числу. Однако это не так. Значение выражения S может стать больше любого наперёд заданного числа. Эта сумма неограниченно возрастает. Однако рост происходит очень медленно. Например, $S_{1000} \approx 7{,}48$, $S_{1\,000\,000} \approx 14{,}39$. Говорят, что гармонический ряд суммы не имеет.

Вы знаете, что дробь вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Например, $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{5}{11} = 0{,}454545... = 0{,}(45)$.

Вы умеете конечную десятичную дробь представлять в виде обыкновенной дроби. Например, $0{,}625 = \frac{625}{1000}$. Сократив эту дробь на 125, получим, что $0{,}625 = \frac{5}{8}$.

Однако вы ещё не знаете, как представлять бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби. Покажем на примере, как это можно сделать с помощью понятия суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Рассмотрим бесконечную периодическую десятичную дробь $0,(45)$.

Представим это число в виде суммы:

$0,(45) = 0,454545\ldots = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$.

Слагаемые $0,45;\ 0,0045;\ 0,000045;\ \ldots$ являются членами бесконечной геометрической прогрессии (b_n), у которой $b_1 = 0,45$, $q = 0,01$. Так как $|q| < 1$, то можем найти сумму этой прогрессии:

$$S = \frac{0,45}{1 - 0,01} = \frac{0,45}{0,99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Поэтому $0,(45) = \frac{5}{11}$.

Пример 1. Представьте бесконечную десятичную дробь $0,2(54)$ в виде обыкновенной дроби.

Решение. Имеем:

$0,2(54) = 0,2545454\ldots = 0,2 + 0,0545454\ldots = 0,2 + 0,054 + 0,00054 + 0,0000054 + \ldots$.

Бесконечную периодическую десятичную дробь $0,0545454\ldots$ можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен $b_1 = 0,054$, а знаменатель $q = 0,01$. Тогда

$$0,0545454\ldots = \frac{0,054}{1 - 0,01} = \frac{0,054}{0,99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}.$$

Отсюда $0,2(54) = 0,2 + 0,0(54) = 0,2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$.

Ответ: $0,2(54) = \frac{14}{55}$. ■

Пример 2. Дан правильный треугольник со стороной a. Из высот этого треугольника построен второй правильный треугольник, из высот второго построен третий треугольник и т. д. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех построенных треугольников.

Решение. Высота правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, высота правильного треугольника со стороной $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ равна

$\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{4}$ и т. д. Тогда периметры данных треугольников образуют последовательность $3a$, $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{9a}{4}$, ..., являющуюся геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{\sqrt{3}}{2}$, меньшим 1. Следовательно, сумма S периметров равна $\frac{3a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Отсюда $S=\frac{6a}{2-\sqrt{3}}=\frac{6a\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=6a\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Площадь правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, площадь правильного треугольника со стороной $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ равна $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=$ $=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4}$; площадь правильного треугольника со стороной $\frac{3a}{4}$ равна $\left(\frac{3a}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$ и т. д. Следовательно, площади данных треугольников образуют последовательность, являющуюся геометрической прогрессией с первым членом $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и знаменателем $\frac{3}{4}$. Тогда сумма площадей равна $\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}}=a^2\sqrt{3}$.

Ответ: $6a\left(2+\sqrt{3}\right)$; $a^2\sqrt{3}$. ■

Пример 3. Найдите знаменатель q бесконечной геометрической прогрессии ($|q|<1$), у которой каждый член в 4 раза больше суммы всех её следующих членов.

Решение. Пусть a_n — произвольный член прогрессии, a_{n+1} — следующий за ним член. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом a_{n+1} и знаменателем q ($|q|<1$). Тогда её сумма будет равна $\frac{a_{n+1}}{1-q}$. По условию $a_n=\frac{4a_{n+1}}{1-q}$, т. е. $a_n=\frac{4a_nq}{1-q}$. Так как ни один член геометрической прогрессии не равен нулю, то получаем $1=\frac{4q}{1-q}$. Отсюда $q=\frac{1}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5}$. ■

1. Что называют суммой бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы?
2. По какой формуле находят сумму бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы?

Упражнения

29.1. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

1) $\sqrt{2}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots$; 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \ldots$.

29.2. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

1) $\sqrt{\frac{3}{2}}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}, \ldots$; 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$.

29.3. Представьте бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,1111...; 3) 0,416416416...; 5) 1,181818...;
2) 0,(5); 4) 0,2666...; 6) 2,3(36).

29.4. Представьте бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,222...; 3) 0,(28); 5) 3,454545...;
2) 0,666...; 4) 0,1777...; 6) 1,4(12).

29.5. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 63, а знаменатель равен $\frac{4}{9}$.

29.6. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна –60, а её первый член равен –65. Найдите знаменатель прогрессии.

29.7. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_3 = 4, b_5 = 2$; 2) $b_1 + b_3 = 20, b_2 + b_4 = \frac{20}{3}$.

29.8. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = 54, b_5 = 2$; 2) $b_2 - b_4 = 48, b_1 - b_3 = 240$.

29.9. (*Задача Ферма*[1].) Покажите, что если S является суммой бесконечной геометрической прогрессии (b_n), то $\frac{S}{S - b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

29.10. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 2, а сумма четырёх её первых членов равна $1\frac{7}{8}$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

[1] Пьер Ферма́ (1601–1665) — выдающийся французский математик.

29.11. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 256, а сумма трёх её первых членов равна 252. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

29.12. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 b_4 = 36$ и $b_3 + b_5 = 8$.

29.13. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (c_n), если $c_3 c_5 = 20$ и $c_2 + c_4 = 12\sqrt{5}$.

29.14. Решите уравнение:

1) $1 + x + x^2 + \ldots = 4$, если $|x| < 1$;

2) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \ldots = 1{,}5$, если $|x| > 1$.

29.15. Решите уравнение $1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{16}{17}$, если $|x| < 1$.

29.16. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой в 1,5 раза больше суммы остальных её членов.

29.17. Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, сумма двух первых членов которой в 8 раз больше суммы остальных её членов.

29.18. В квадрат со стороной a вписан квадрат, вершинами которого являются середины сторон первого квадрата, во второй квадрат вписан третий, вершинами которого являются середины сторон второго, и т. д. (рис. 29.3). Найдите сумму площадей всех построенных квадратов.

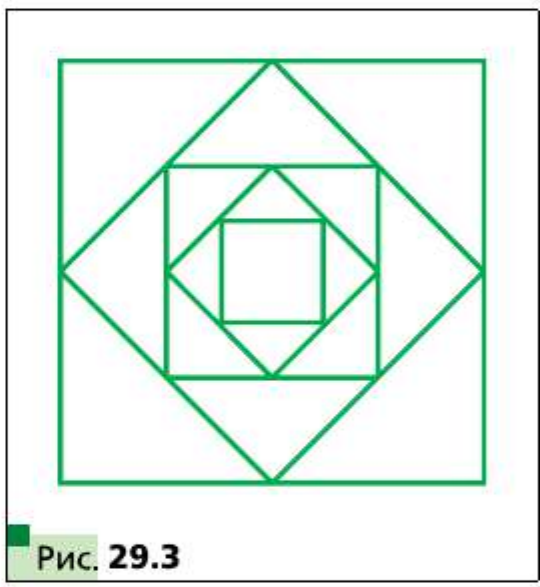


Рис. **29.3**

29.19. Геометрическая фигура составлена из бесконечной последовательности равносторонних треугольников, расположенных так, как показано на рисунке 29.4. Площадь каждо-

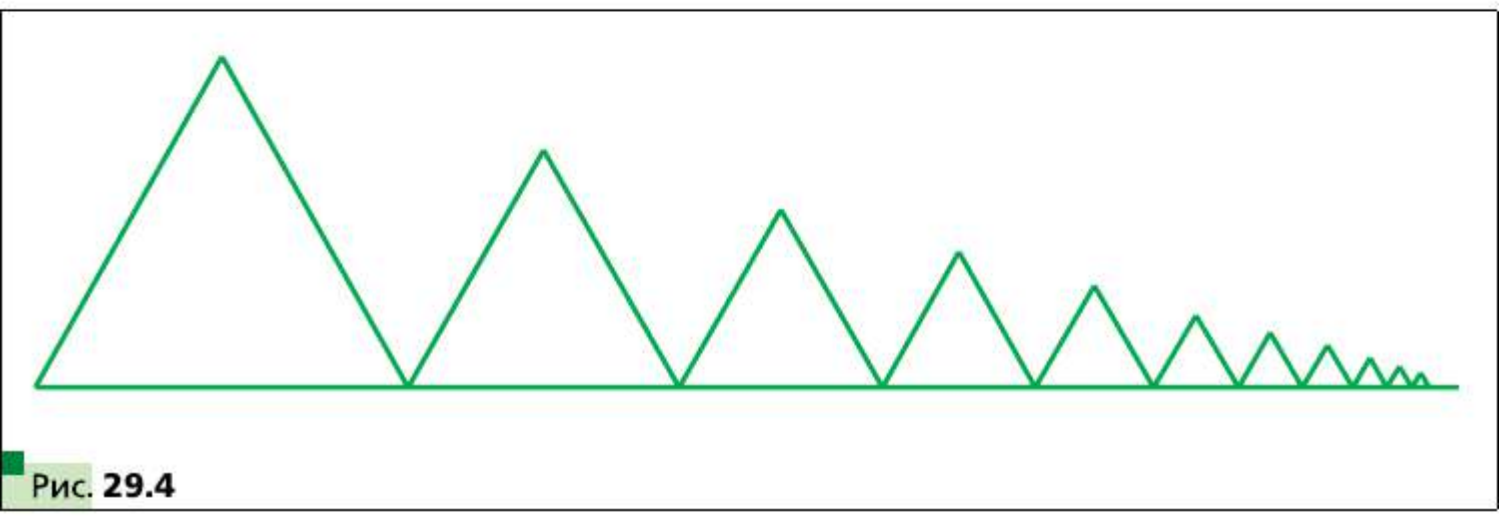


Рис. **29.4**

го следующего треугольника в два раза меньше площади предыдущего. Сторона первого треугольника равна 4 см. Поместится ли такая геометрическая фигура на листе вашей тетради?

29.20. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в треугольник вписана окружность, в эту окружность вписан правильный треугольник и т. д. Найдите сумму: 1) периметров всех построенных треугольников; 2) площадей построенных треугольников; 3) длин окружностей; 4) площадей кругов, ограниченных данными окружностями.

29.21. В квадрат со стороной a вписана окружность, в окружность вписан квадрат, в этот квадрат вписана окружность, в которую снова вписан квадрат, и т. д. Найдите сумму: 1) периметров всех построенных квадратов; 2) площадей построенных квадратов; 3) длин окружностей; 4) площадей кругов, ограниченных данными окружностями.

29.22. Постройте график функции $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots$, где $x \neq 0$.

29.23. Постройте график функции $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} + \ldots$, где $x > 0$.

Упражнения для повторения

29.24. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1, \\ y = |x| + a \end{cases}$$

имеет три решения?

29.25. Решите уравнение $6x^2 + \sqrt{3x^2 + 2x + 4} = 13 - 4x$.

§ 30 Суммирование

Вместе с каждой последовательностью $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ можно рассматривать и такую последовательность (S_n):

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots .$$

Нахождение формулы n-го члена последовательности (S_n) называют **суммированием n первых членов последовательности (a_n)**.

Поскольку вы знаете формулы для вычисления суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий, то тем самым умеете суммировать первые n членов этих последовательностей.

С помощью греческой буквы Σ (сигма) сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ записывают так: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Например, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

Из курса алгебры 8 класса вы знаете, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Это означает, что вы умеете суммировать первые n членов соответственно последовательности квадратов и последовательности кубов натуральных чисел.

Одним из эффективных способов суммирования является использование ранее доказанных формул.

Пример 1. Найдите сумму $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + \ldots + \frac{2^n \cdot n + 1}{2^n}$.

Решение. Имеем: $\frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = k + \frac{1}{2^k}$.

Тогда данную сумму можно записать так:

$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right)$. Отсюда

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}$. ■

Пример 2. Найдите сумму $1 + 12 + 45 + \ldots + n^2(2n - 1)$.

Решение. Запишем $k^2(2k - 1) = 2k^3 - k^2$. Отсюда

$$1 + 12 + 45 + \ldots + n^2(2n - 1) =$$

$$= (2 \cdot 1^3 - 1^2) + (2 \cdot 2^3 - 2^2) + (2 \cdot 3^3 - 3^2) + \ldots + (2 \cdot n^3 - n^2) =$$

$$= 2(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + n - 1)}{6}.$$ ■

Пример 3. Найдите сумму $7 + 77 + 777 + \underbrace{77\ldots7}_{n}$.

Решение. Так как $\underbrace{77\ldots7}_{n} = 7 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n}$, то для решения задачи достаточно найти сумму $S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$ и полученный результат умножить на 7.

Имеем: $S_n = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} =$

$= \frac{1}{9}(10 + 10^2 + \ldots + 10^n) - \frac{1}{9}(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}) = \frac{1}{9} \cdot \frac{10(10^n-1)}{10-1} - \frac{n}{9} =$

$= \frac{10(10^n-1)}{81} - \frac{n}{9}$.

Искомая сумма равна $\frac{70(10^n-1)}{81} - \frac{7n}{9}$. ■

Если для данной последовательности (a_n) удаётся найти такую последовательность (b_n), что $a_n = b_{n+1} - b_n$, тогда сумму $\sum_{k=1}^{n} a_k$ найти легко. Действительно, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$.

Пример 4. Найдите сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Решение. Имеем: $n \cdot n! = (n+1)! - n!$. Теперь можно записать

$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + ((n+1)! - n!) =$

$= (n+1)! - 1$. ■

Пример 5. Докажите, что если последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия с ненулевыми членами, то

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Решение. Если для данной прогрессии $d = 0$, то утверждение задачи очевидно. При $d \neq 0$ имеем: $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{d}$, где d — разность прогрессии. Тогда

$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) \cdot \frac{1}{d} + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{d} =$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{a_{n+1} - a_1}{da_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{a_1 + dn - a_1}{da_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}. \blacksquare$$

Пример 6. Найдите сумму $\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \frac{25}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1) + 1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда можно записать

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 1}{k(k+1)} = \left(2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 2n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(2n+3)}{n+1}. \blacksquare$$

Упражнения

30.1. Найдите сумму:

1) $2 + 10 + 30 + \ldots + n(n^2 + 1)$;

2) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$.

30.2. Найдите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$.

30.3. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n} \frac{5^k \cdot k - 1}{5^k}$.

30.4. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1} \cdot k^2 + 3^k \cdot k + 1}{3^k}$.

30.5. Найдите сумму:

1) $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99 \ldots 9}_{n}$; 2) $5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{55 \ldots 5}_{n}$.

30.6. Докажите, что если последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия с положительными членами, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

30.7. Найдите сумму:

1) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{13}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$;

4) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

30.8. Найдите сумму:

1) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{37}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}$.

30.9. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}$.

30.10. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

30.11. Найдите сумму $S_n=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+n\cdot a^{n-1}$, где $a\neq 1$.

Упражнения для повторения

30.12. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2-(2a+2)x+6a-3}{\sqrt{2+x-x^2}}=0$ имеет единственное решение?

30.13. Решите уравнение $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$.

Итоги главы 5

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют разностью арифметической прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d\,(n-1)$$

Свойство членов арифметической прогрессии

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называют последовательность, первый член который отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число. Это число называют знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Свойство членов геометрической прогрессии

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

глава

6 Элементы статистики и теории вероятностей

- В этой главе вы узнаете, что такое статистическое исследование. Как собирают и анализируют данные. Ознакомитесь с операциями над событиями, зависимыми и независимыми событиями, геометрической вероятностью.
- Узнаете, что такое схема Бернулли, дискретная случайная величина и её распределение. Ознакомитесь с некоторыми характеристиками случайной величины.

§ 31 Начальные сведения о статистике

Каким тиражом следует выпустить учебник по алгебре для 9 класса?

Стоит ли определённому политику выдвигать свою кандидатуру на очередных выборах мэра?

Сколько килограммов рыбы и морепродуктов потребляет в среднем за год один житель России?

Выгодно ли для концерта данного артиста арендовать стадион?

На эти и многие другие вопросы помогает отвечать статистика.

Определение

Статистика (от лат. *status* — «состояние») — это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.

Статистическое исследование состоит из нескольких этапов.

Остановимся отдельно на каждом этапе.

Сбор данных

Вы знаете, что вредные привычки, неправильное питание, малоподвижный образ жизни приводят к сердечно-сосудистым заболеваниям. К такому выводу врачи пришли, исследовав, конечно, не всех людей планеты.

Понятно, что исследование носило *выборочный*, но *массовый* характер.

В статистике совокупность объектов, на основании которых проводят исследование, называют **выборкой**.

В данном примере выборка состояла из нескольких миллионов человек.

Следует отметить, что статистический вывод, основанный лишь на численности выборки, не всегда достоверен. Например, если мы, исследуя популярность артиста, ограничимся опросом людей, пришедших на его концерт, то полученные выводы не будут объективными, ведь эти люди пришли на концерт именно потому, что этот артист им нравится. Статистики говорят, что выборка должна быть **репрезентативной** (от франц. *représentatif* — «показательный»).

Одним из условий формирования репрезентативной выборки является случайный выбор её элементов. При этом должна быть обеспечена одинаковая вероятность попадания в выборку любого объекта из множества исследуемых. Так, врачи, изучая факторы риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний, исследовали людей разного возраста, профессий, национальностей и т. д., подбирая элементы выборки случайным образом.

Следовательно, *сбор данных должен основываться на массовости и репрезентативности выборки*. Иногда выборка может совпадать с множеством всех объектов, исследование которых проводится. Тогда её называют **генеральной совокупностью**. Примером такого исследования является проведение Единого государственного экзамена по математике для выпускников 11 класса.

Способы представления данных

Собранную информацию (совокупность данных) удобно представлять в виде таблиц, графиков, диаграмм.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В таблице представлены результаты выступлений российских школьников на международных математических олимпиадах в течение 2001–2018 гг.

Год	Место проведения	Количество медалей		
		Золотые	Серебряные	Бронзовые
2001	США	5	1	0
2002	Великобритания	6	0	0
2003	Япония	3	2	1
2004	Греция	4	1	1
2005	Мексика	4	2	0
2006	Словения	3	3	0
2007	Вьетнам	5	1	0
2008	Испания	6	0	0
2009	Германия	5	1	0
2010	Казахстан	4	2	0
2011	Нидерланды	2	4	0
2012	Аргентина	4	2	0
2013	Колумбия	4	2	0
2014	ЮАР	3	3	0
2015	Таиланд	0	6	0
2016	Гонконг	4	1	1
2017	Бразилия	1	3	2
2018	Румыния	5	1	0

Примечание. Команда участников на международных математических олимпиадах состоит не более чем из 6 человек.

Во многих случаях данные удобно представлять в виде **столбчатой диаграммы**, которую ещё называют **гистограммой** (от греч. *histos* — «столб» и *gramma* — «написание»). Такая информация легко воспринимается и хорошо запоминается.

Информацию также можно представлять в виде графиков.

Пример 2. На рисунке 31.1 изображён график ежегодного процентного роста количества пользователей Интернета в России в течение 2010–2018 гг.

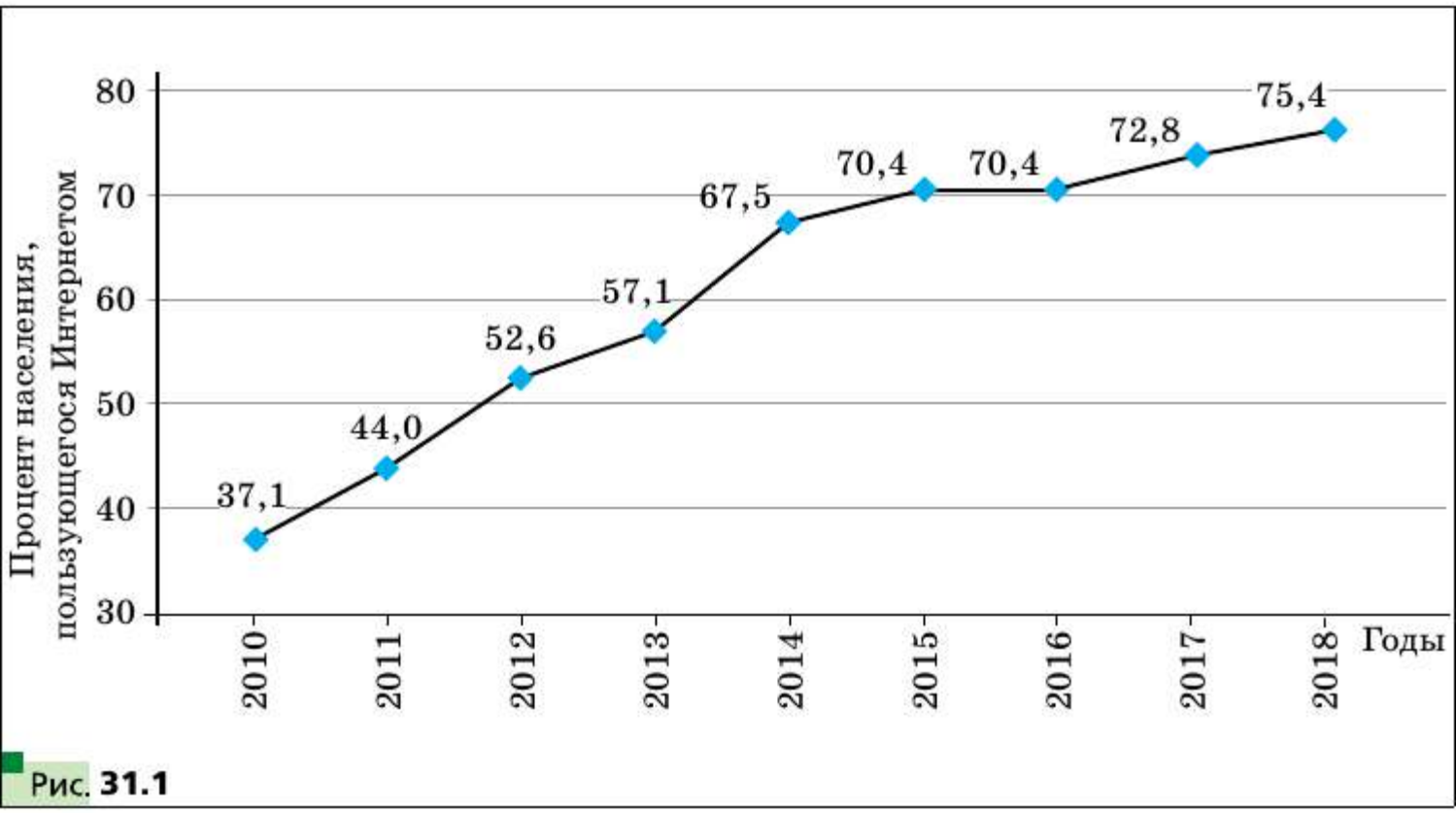


Рис. **31.1**

Столбчатые диаграммы и графики обычно используют тогда, когда хотят продемонстрировать, как с течением времени изменяется некоторая величина.

Пример 3. На рисунке 31.2 приведено распределение золотых медалей, завоёванных российскими школьниками на международных олим-

Рис. **31.2**

пиадах по математике, биологии, химии, физике, географии, информатике, естественным наукам, астрономии и астрофизике в 2018 г. Для этого использована **круговая диаграмма**: круг представляет общее количество медалей, а каждому предмету соответствует некоторый сектор круга.

Пример 4. На рисунке 31.3 представлена информация о количестве профессиональных театров в России (период с 2012 по 2017 г.).

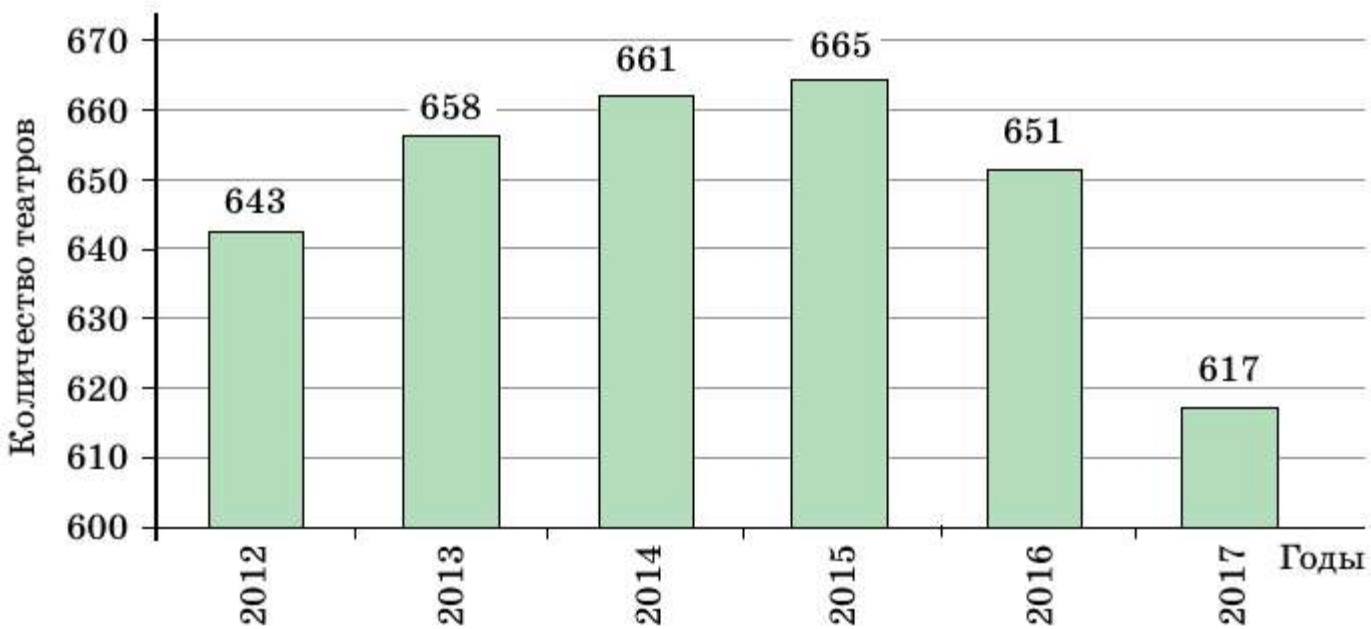


Рис. **31.3**

Если хотят выявить некую связь между изучаемыми величинами, то применяют **диаграммы рассеивания**.

Например, выясним, есть ли устойчивая связь между бюджетом кинокартин и мировыми кассовыми сборами лауреатов кинопремии «Оскар»[1].

На рисунке 31.4 изображены точки, абсциссы которых — бюджеты кинофильмов, получивших премию в 2015–2018 гг., ординаты — кассовые сборы. Полученная диаграмма рассеивания показывает, что из двух

[1] **«Оскар»** (премия Американской академии кинематографических искусств и наук) — престижная ежегодная премия в области кинематографии. Обладателями «Оскара» не раз становились и россияне. Так, лучшими фильмами на иностранном языке были признаны «Война и мир» (реж. С. Бондарчук, 1968), «Дерсу Узала» (реж. А. Куросава, 1975, совместное производство СССР и Японии), «Москва слезам не верит» (реж. В. Меньшов, 1981), «Утомлённые солнцем» (реж. Н. Михалков, 1994), лучшим документальным фильмом — «Разгром немецких войск под Москвой» (реж. Л. Варламов, И. Копалин, 1942), лучшим короткометражным анимационным фильмом — «Старик и море» (реж. А. Петров, 1999).

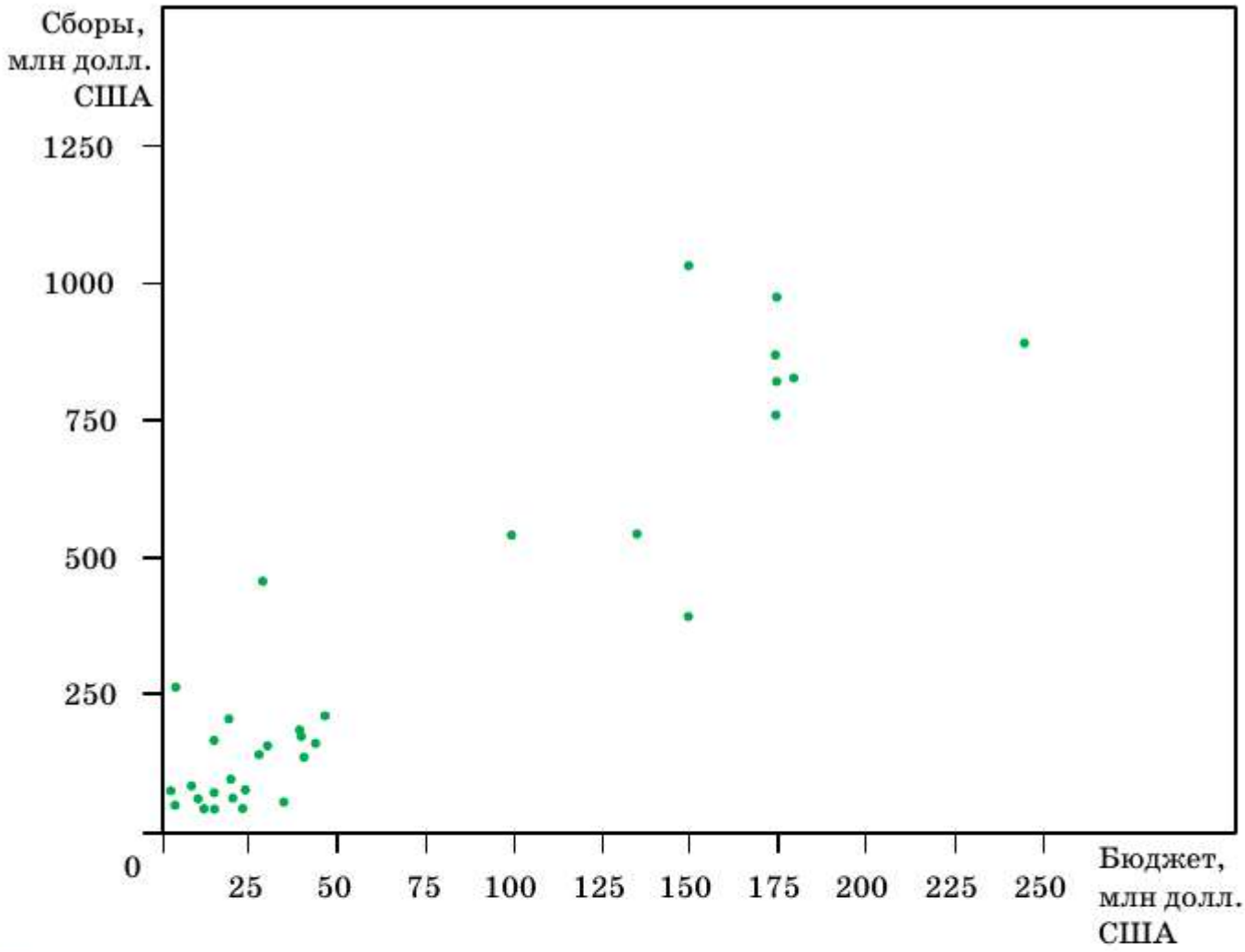


Рис. **31.4**

фильмов тот, который имеет меньший бюджет, может давать больший кассовый сбор. Однако в целом прослеживается тенденция: больший бюджет даёт больший кассовый сбор.

Рассмотрим ещё один пример. В таблице приведены административные центры субъектов Центрального федерального округа России и указаны их географическая широта и среднегодовая температура воздуха.

Город	Градус с. ш.	Температура, °C
Белгород	50,6	7,7
Брянск	53,3	6,2
Владимир	56,1	4,7
Воронеж	51,7	6,9

Окончание таблицы

Город	Градус с. ш.	Температура, °C
Иваново	57,0	3,6
Калуга	54,5	4,4
Кострома	57,8	4,2
Курск	51,7	6,7
Липецк	52,6	5,1
Москва	55,8	5,8
Орёл	53,0	6,2
Рязань	54,6	5,4
Смоленск	54,8	5,4
Тамбов	52,7	6,1
Тверь	56,9	5,1
Тула	54,2	5,7
Ярославль	57,6	3,6

Построив соответствующую диаграмму рассеивания (рис. 31.5), видим, что она показывает более устойчивую связь (по сравнению с диаграммой на рисунке 31.4) между рассматриваемыми рядами данных: чем дальше на север, тем меньше среднегодовая температура.

1. Какую науку называют статистикой?
2. Из каких этапов состоит статистическое исследование?
3. Что в статистике называют выборкой?
4. На чём должен основываться сбор данных?
5. Какие существуют способы представления данных?
6. В каких случаях применяют диаграммы рассеивания?

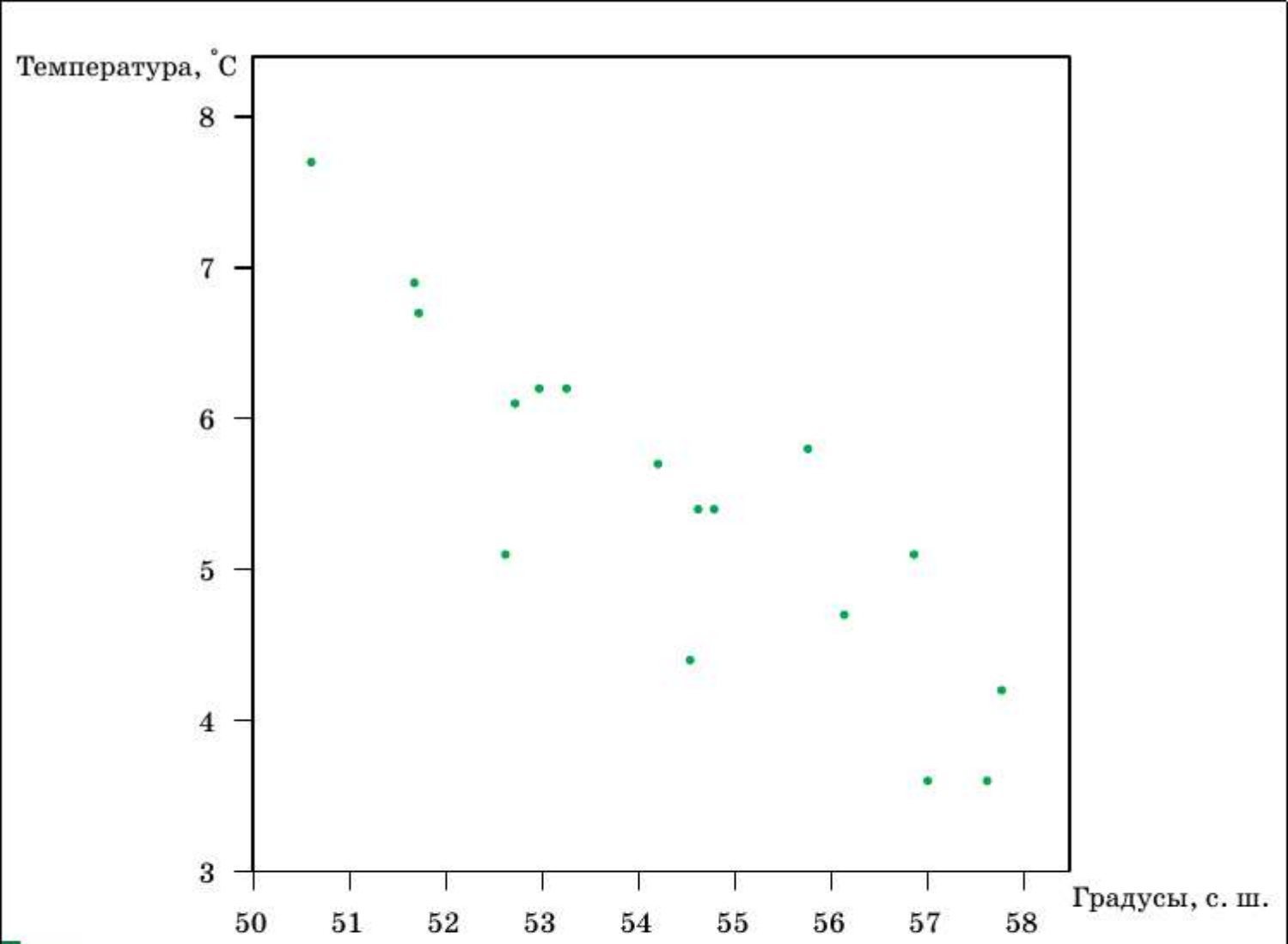


Рис. **31.5**

Упражнения

31.1. Используя диаграмму, на которой отображено, сколько посещений музеев в год в России приходится на 1000 человек населения (рис. 31.6), определите:

1) в какой из рассматриваемых годов посещаемость музеев была наибольшей; наименьшей;

2) на сколько человек выросла посещаемость музеев в 2016 г. по сравнению с 2013 г.;

3) на сколько процентов возросла посещаемость музеев в 2017 г. по сравнению с 2012 г. (ответ округлите до десятых).

31.2. Учащиеся 9 классов занимаются в разных кружках. Используя диаграмму (рис. 31.7), дайте ответы на вопросы.

1) Какой кружок посещает наибольшее количество девятиклассников?

2) Какие кружки посещает одинаковое количество девятиклассников?

3) Какую часть от количества учеников, занимающихся в кружке компьютерного дизайна, составляет количество учеников, занимающихся в кружке рисования?

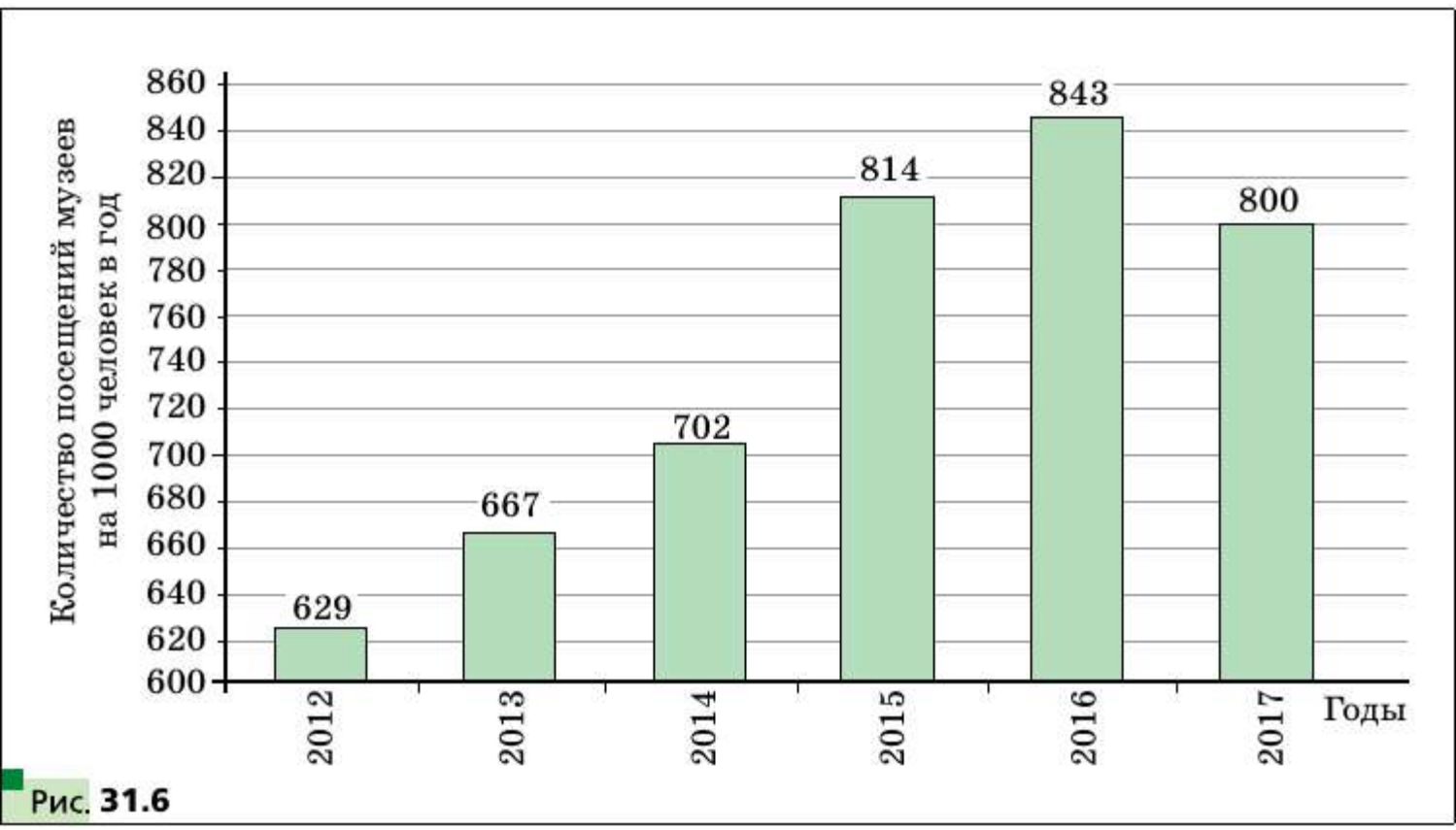


Рис. **31.6**

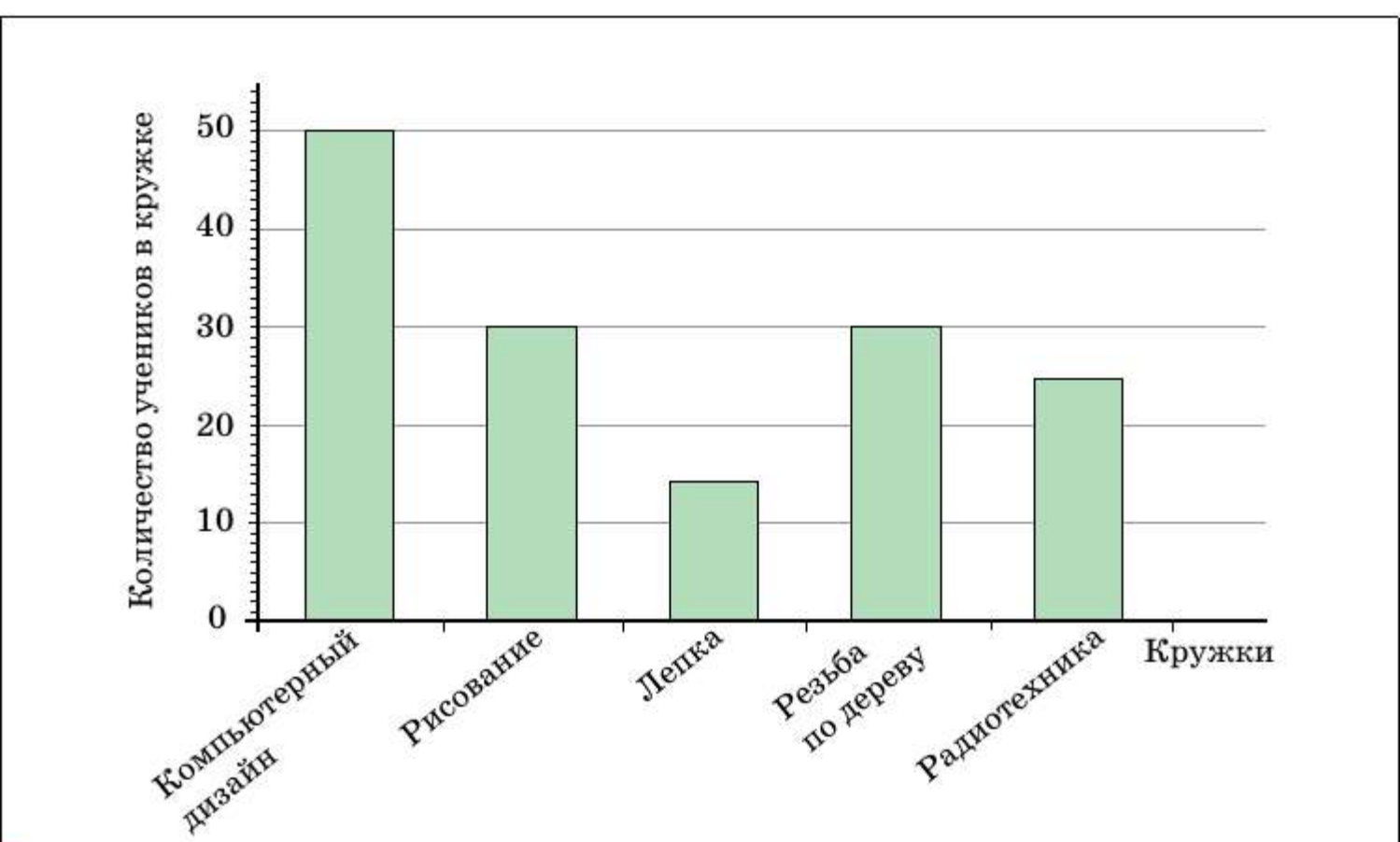


Рис. **31.7**

4) Сколько процентов составляет количество учеников, занимающихся в кружке лепки, от количества учеников, занимающихся в кружке радиотехники?

31.3. Используя таблицу среднегодовых температур воздуха в отдельных городах России, постройте соответствующую столбчатую диаграмму.

Город	Температура, °С	Город	Температура, °С
Тула	5,7	Краснодар	12,1
Оренбург	5,3	Нижний Новгород	4,8
Екатеринбург	3,5	Пермь	2,7
Челябинск	1,5	Мурманск	0,6
Казань	4,6	Хабаровск	2,4

31.4. Используя таблицу данных потребления молока и молочных продуктов (в кг) в Российской Федерации на душу населения с 2009 по 2017 г., постройте соответствующий график.

2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
246	247	246	249	248	248	239	237	233

31.5. Используя таблицу развития Московского метрополитена в 1935–2015 гг., постройте график увеличения количества его станций.

Год	Количество станций	Год	Количество станций
1935	13	1985	129
1945	29	1995	156
1955	41	2005	170
1965	75	2015	198
1975	104		

31.6. Определите, является ли репрезентативной выборка.

1) Чтобы узнать, как часто жители города в выходные дни бывают на природе, были опрошены члены трёх садовых кооперативов.

2) В целях выяснения знания девятиклассниками творчества А.С. Пушкина случайным образом были опрошены 5000 девятиклассников в разных регионах страны.

3) Для определения процента пользователей Интернета от общего населения России случайным образом были опрошены 1000 москвичей.

4) Для выяснения рейтинга молодёжной телепрограммы случайным образом были опрошены 10 000 юношей и девушек в возрасте от 15 до 20 лет в разных регионах страны.

31.7. Используя условие задачи 31.2 и рисунок 31.7, постройте круговую диаграмму распределения учащихся по разным кружкам при условии, что каждый девятиклассник посещает только один кружок.

31.8. В таблице приведены данные о порядковых номерах и атомной массе химических элементов I группы периодической системы элементов.

Химический элемент	Порядковый номер	Атомная масса
Водород	1	1,0
Литий	3	6,9
Натрий	11	23,0
Калий	19	39,1
Медь	29	63,5
Рубидий	37	85,5
Серебро	47	107,9
Цезий	55	132,9
Золото	79	197,0
Франций	87	223,0
Рентгений	111	281,0

Постройте диаграмму рассеивания. Есть ли связь между атомными массами химических элементов и их порядковыми номерами?

31.9. В таблице приведены данные о посещаемости и количестве забитых голов в финальных стадиях чемпионатов мира по футболу.

Чемпионат	Зрителей, млн чел.	Голов
1930 (Уругвай)	0,6	70
1934 (Италия)	0,4	70
1938 (Франция)	0,4	84
1950 (Бразилия)	1,0	88
1954 (Швейцария)	0,9	140
1958 (Швеция)	0,9	126
1962 (Чили)	0,9	89
1966 (Англия)	1,6	89
1970 (Мексика)	1,6	95
1974 (ФРГ)	1,8	97
1978 (Аргентина)	1,5	102
1982 (Испания)	2,1	146
1986 (Мексика)	2,4	132
1990 (Италия)	2,5	115
1994 (США)	3,6	141
1998 (Франция)	2,8	171
2002 (Юж. Корея/Япония)	2,7	161
2006 (Германия)	3,4	147
2010 (ЮАР)	3,2	145
2014 (Бразилия)	3,4	171
2018 (Россия)	3,0	169

Постройте диаграмму рассеивания. Есть ли связь между количеством зрителей, приходящих на трибуны, и количеством забитых голов?

31.10. Докажите, что значение выражения $27^6 - 9^7$ кратно 48.

31.11. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста и встретились через 3 ч 45 мин. Если бы первый из них вышел на 2 ч раньше второго, то они встретились бы через 4,5 ч после выхода первого. Найдите скорость каждого туриста.

§ 32 Статистические характеристики

Анализ данных, выводы и рекомендации

Статистические сведения поступают из разных областей знаний и деятельности человека: экономики, медицины, социологии, демографии, сельского хозяйства, метеорологии, спорта и т. д. Однако статистические методы обработки (анализа) данных, несмотря на разнообразие областей применения, имеют много общего. Ознакомимся с некоторыми из них.

В статистической информации средние значения полученной совокупности данных встречаются довольно часто. Например, приведём таблицу потребления мяса в России (в килограммах на человека в год).

Наименование продукта	Год			
	2014	2015	2016	2017
Говядина	16,6	15,0	14,2	14,1
Свинина	24,0	24,1	25,4	26,6
Мясо птицы	31,3	32,4	32,5	34,1

Такую таблицу могут использовать экономисты и диетологи в своих исследованиях, выводах и рекомендациях, крупные производители и поставщики сельхозпродукции при планировании своей деятельности.

Однако среднее значение не всегда точно (адекватно) отображает ситуацию. Например, если в стране доходы разных слоёв населения очень различаются, то средний доход на одного человека для большинства жителей может не отображать их материальное состояние.

Допустим, в какой-то стране 100 жителей — очень богатые, а остальные 5 млн — очень бедные. Тогда показатель среднего дохода может оказаться не низким, а следовательно, не будет адекватно отображать общую бедность населения.

В подобных случаях для анализа данных используют другие характеристики.

С помощью примера 1 в § 31 составим таблицу, отображающую количество медалей каждого вида, завоёванных российскими школьниками на международных математических олимпиадах в течение 2001–2018 гг.

Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали
68	35	5

Такую таблицу называют **частотной**, а числа, записанные во второй строке, — **частотами**.

Частота 68 показывает, что российские школьники чаще всего завоёвывали золотые медали. Показатель «золотые медали» называют **модой** полученных данных.

Это слово всем хорошо знакомо. Мы часто говорим «войти в моду», «выйти из моды», «дань моде». В повседневной жизни мода означает совокупность взглядов и привычек, которым большинство отдаёт предпочтение в данный момент времени.

Именно мода является важнейшей характеристикой тогда, когда полученная совокупность данных не является числовым множеством. Продемонстрируем это на таком примере.

Одна фирма, планирующая поставлять джинсы в Россию, провела опрос репрезентативной выборки, состоящей из 500 человек. В результате получили такую частотную таблицу.

Размер джинсов	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	61	104	111	108	64	43	9
Относительная частота, %	12,2	20,8	22,2	21,6	12,8	8,6	1,8

В третьей строке этой таблицы записано отношение соответствующей частоты к величине выборки. Это отношение, записанное в процен-

тах, называют **относительной частотой**. Например, для размера XS имеем: $\frac{61}{500} \cdot 100 = 12{,}2$ (%).

Мода данной выборки — это размер M, и ей соответствует относительная частота 22,2 %.

Тем самым фирма получила информацию, что наибольшую часть объёмов поставок (около 22 %) должны составлять джинсы размера M.

Заметим, что если бы в таблице две частоты были равны и принимали наибольшие значения, то модой являлись бы два соответствующих размера.

Для выработки стратегии своей деятельности фирме важно знать не только моду выборки, но и «сконцентрированность» других данных вокруг моды. Так, в нашем примере частоты, соответствующие размерам S и L, не сильно (по сравнению с другими) отличаются от частоты размера M.

Если эта информация не будет учтена, то фирма может понести убытки от нераспроданных джинсов неходовых размеров или создать дефицит ходовых размеров.

Выше мы привели пример, когда среднее значение неточно отображает материальное состояние людей в стране. Более полную характеристику можно получить, если среднее значение дополнить результатом такого исследования.

Формируют репрезентативную выборку, состоящую из жителей данной страны, и получают совокупность данных, составленную из доходов. Далее в соответствии со шкалой, определяющей уровень доходов (низкий, средний, высокий), разбивают полученный ряд данных на три группы. Составляют таблицу, в которую вносят значения частот и относительных частот.

Уровень доходов	Низкий	Средний	Высокий
Частота	m	n	k
Относительная частота, %	p	q	r

Мода такой совокупности данных может характеризовать уровень доходов в стране.

Исследование совокупности данных можно сравнить с работой врача, ставящего диагноз. В зависимости от жалоб пациента или видимых симптомов врач выбирает определённую методику поиска причины болезни. Понятно, что методы исследования определяют точность диагноза. Так и в статистике: в зависимости от собранной информации и спосо-

ба её получения применяют различные методы её обработки. Эти методы могут дополнять друг друга, какой-то из них может более точно (адекватно), чем другие, отражать конкретную ситуацию. Так, анализируя выступления российских школьников на международных математических олимпиадах, можно установить, что статистические характеристики — среднее значение и мода — удачно сочетаются. А в примере, определяющем ходовой размер джинсов, наиболее приемлем поиск моды.

Обратимся к примеру 1 в § 31. Приведённая таблица позволяет узнать, сколько в среднем золотых медалей в год завоёвывали школьники России на международных математических олимпиадах. Для этого надо количество всех золотых медалей, полученных на протяжении рассматриваемого периода, разделить на количество лет. Например, за период 2005–2016 гг. имеем:

$$\frac{4+3+5+6+5+4+2+4+4+3+0+4}{12} = \frac{44}{12} \approx 3{,}67.$$

Так как за год можно завоевать не более 6 медалей, то среднее значение 3,67 свидетельствует о том, что команда России выступает на этом престижном форуме с большим успехом.

Чем богаче арсенал методик обработки данных, тем более объективный вывод можно получить.

Познакомимся ещё с одной важной статистической характеристикой.

Семья, приняв решение сделать ремонт на кухне, интересуется, сколько стоит положить один квадратный метр керамической плитки. Изучив прейскуранты 11 строительных фирм, получили такую информацию (цены записаны в рублях в порядке возрастания):

620, 630, 650, 650, 660, 700, 890, 900, 1210, 1240, 1750.

Заметим, что полученный ряд данных имеет большой **размах**, т. е. большую разность между наибольшим и наименьшим значениями данной выборки. Он равен 1130 р.

Семья хочет выбрать фирму со средними ценами.

Среднее значение полученной совокупности данных равно 900 р.

Однако полученные данные показывают, что цену 900 р. скорее можно отнести к высоким, чем к средним.

Обратим внимание на число, которое стоит посередине записанной упорядоченной совокупности данных. Это число 700. Его называют **медианой** этой выборки. В такой ситуации именно медиана помогает выбрать фирму со средними ценами. Действительно, в последовательности из 11 чисел есть пять меньших чем 700 и пять бóльших чем 700.

Теперь рассмотрим упорядоченную совокупность данных, состоящую из чётного количества чисел, например из восьми:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Здесь «серединой» выборки являются сразу два числа: 7 и 8. Считают, что медиана такой выборки равна их среднему арифметическому $\frac{7+8}{2} = 7{,}5$.

Использование такой характеристики, как медиана, особенно эффективно тогда, когда в ряд данных попали так называемые **случайные выбросы** — отдельные значения выборки, явно отличающиеся от других. Появление случайных выбросов может быть связано с целым рядом причин: ошибкой при замерах, аномальным явлением, дефектом исследуемого объекта и т. п. Например, если наугад измерять температуру предметов в комнате, то большая часть данных будет находиться в пределах от 18 до 22 °С. Однако радиатор отопления может показать результат 60 °С.

Рассмотрим два ряда данных: 1, 2, 3, 4, 5 и 1, 2, 3, 4, 100. Мы видим, что появление случайного выброса 100 сильно повлияло на среднее значение выборки. При этом медиана выборки, число 3, не поменяла своё значение. Этот пример иллюстрирует, что медиана более устойчива к случайным выбросам, чем среднее значение.

Среднее значение, моду и медиану называют **мерами центральной тенденции** полученной совокупности данных.

В статистике разработаны и другие специальные методики, по которым делают выводы или принимают решения. Например, в каком-то регионе возрастает количество людей, заболевших гриппом. Пора ли объявлять карантин? Другой пример. Возникла гипотеза, что станок-автомат производит детали, среди которых неприемлемый процент бракованных. Как подтвердить или опровергнуть эту гипотезу? Методики, позволяющие отвечать на поставленные вопросы и многие другие аналогичные, называют в статистике **решающими правилами**.

Как уже отмечалось, одной из важных характеристик выборки является сконцентрированность данных вокруг среднего значения. В некоторых случаях разброс данных может характеризовать их наибольшее и наименьшее значения и связанную с ними величину — размах выборки. Например, если при сдаче ЕГЭ по математике учениками некоторого класса наибольший и наименьший тестовые баллы оказались равными 95 и 90, то можно сделать вывод, что результаты всех учащихся не сильно отличаются друг от друга, а значит, и от среднего показателя.

Ещё одной характеристикой разброса данных могут служить их **отклонения** от среднего значения выборки. Приведём ряд данных, соответствующих количеству золотых медалей, завоёванных российскими школьниками на международных математических олимпиадах с 2009 по 2018 г.:

5, 4, 2, 4, 4, 3, 0, 4, 1, 5. (1)

Среднее значение этой выборки равно 3,2. Найдём отклонения данных выборки от среднего:

$5 - 3{,}2 = 1{,}8$; $4 - 3{,}2 = 0{,}8$; $0 - 3{,}2 = -3{,}2$; $1 - 3{,}2 = -2{,}2$;
$4 - 3{,}2 = 0{,}8$; $4 - 3{,}2 = 0{,}8$; $4 - 3{,}2 = 0{,}8$; $5 - 3{,}2 = 1{,}8$.
$2 - 3{,}2 = -1{,}2$; $3 - 3{,}2 = -0{,}2$;

Получилась новая выборка, состоящая из отклонений. Она тоже может характеризовать разброс исходных данных. Если отклонения небольшие по модулю, то в исходном наборе числа не сильно отличаются от среднего значения. Однако хотелось бы получить более компактную характеристику «кучности» данных вокруг среднего значения.

Кажется естественным в качестве такой характеристики выбрать среднее арифметическое значений отклонений. Однако для любой выборки это число равно нулю (докажите этот факт самостоятельно).

Если каждое из отклонений возвести в квадрат, то получим выборку, состоящую из неотрицательных чисел. Среднее значение этой выборки называют **дисперсией** (от лат. *dispersio* — «рассеивание»).

Легко установить, что дисперсия выборки 5, 4, 2, 4, 4, 3, 0, 4, 1, 5 равна 2,56.

Приведём ряд данных, соответствующих количеству золотых медалей, завоёванных российскими школьниками на международных математических олимпиадах с 2002 по 2011 г.:

6, 3, 4, 4, 3, 5, 6, 5, 4, 2. (2)

Дисперсия этой выборки равна 1,56. Она меньше, чем дисперсия выборки (1). Следовательно, в период 2002 по 2011 г. показатели по золотым медалям были более стабильными, чем в период с 2009 по 2018 г.

Поскольку выборки (1) и (2) содержат немного данных, то к полученному выводу можно было прийти без вычислений, путём прикидки. Однако при работе с большими рядами данных оценить разброс без числовых характеристик очень сложно.

Если все элементы ряда данных выражаются в определённых единицах измерения, то дисперсия выражается в квадратных единицах. Чтобы устранить этот недостаток, рассматривают величину, равную квадратному корню из дисперсии. Её называют **средним квадратичным отклонением**. Этой характеристикой можно оценивать разброс данных выборки, состоящей из величин, имеющих одну и ту же размерность.

Рассмотрим пример. В следующей таблице приведены данные о средних месячных температурах за последние 30 лет в городах Краснодаре и Иркутске, а также указано среднее квадратичное отклонение соответствующих рядов данных. Полученный результат подтверждает то, что разброс средних месячных температур в умеренной климатической зоне меньше, чем соответствующий показатель в резко континентальной климатической зоне.

Месяц	Краснодар	Иркутск
1	0,6	−17,8
2	1,1	−14,4
3	5,5	−6,4
4	12,2	2,5
5	17,2	10,2
6	21,3	15,4
7	24,1	18,3
8	23,7	15,9
9	18,5	9,2
10	12,3	1,8
11	6,1	−7,6
12	2,1	−15,3
Среднее за год	12,1	1,0
Среднее квадратичное отклонение	8,5	12,5

Заметим, что среднее значение ряда данных и его дисперсия обладают такими свойствами:

1) если каждый элемент ряда данных изменить на одно и то же число, то среднее значение изменится на это же число, а дисперсия останется неизменной;

2) если каждый элемент ряда данных изменить в m раз, среднее значение изменится в m раз, а дисперсия — в m^2 раз.

1. Как в статистике называют специальные методики, по которым делают выводы или принимают решения?

2. Приведите примеры применения статистической информации в форме средних значений.

3. Приведите примеры, когда статистическая информация в форме средних значений неточно отображает ситуацию.

4. Опишите частотную таблицу.

5. Опишите, что такое мода.
6. Опишите, как найти относительную частоту.
7. Какое число называют медианой упорядоченной выборки?
8. Что называют мерами центральной тенденции совокупности данных?
9. Чему равно среднее арифметическое значение отклонений любой выборки?
10. Среднее значение какой выборки называют дисперсией выборки?
11. Какую величину называют средним квадратичным отклонением выборки?

Упражнения

32.1. В школе измерили рост 90 шестиклассников с точностью до 5 см. Результаты измерений отобразили в виде столбчатой диаграммы (рис. 32.1). Укажите моду данной выборки.

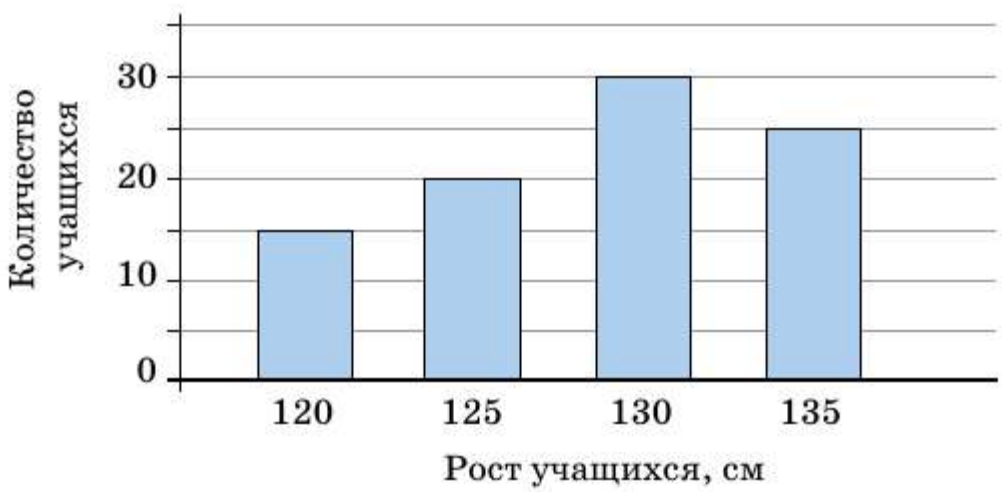


Рис. **32.1**

32.2. На графике (рис. 32.2) отображены объёмы продажи пирожков в школьном буфете в течение одной недели. Сколько в среднем продавали пирожков за один день?

Рис. **32.2**

32.3. На гистограмме (рис. 32.3) отображены объёмы продаж учебников по математике в течение пяти месяцев в одном из магазинов. Сколько учебников по математике продавали в среднем за один месяц?

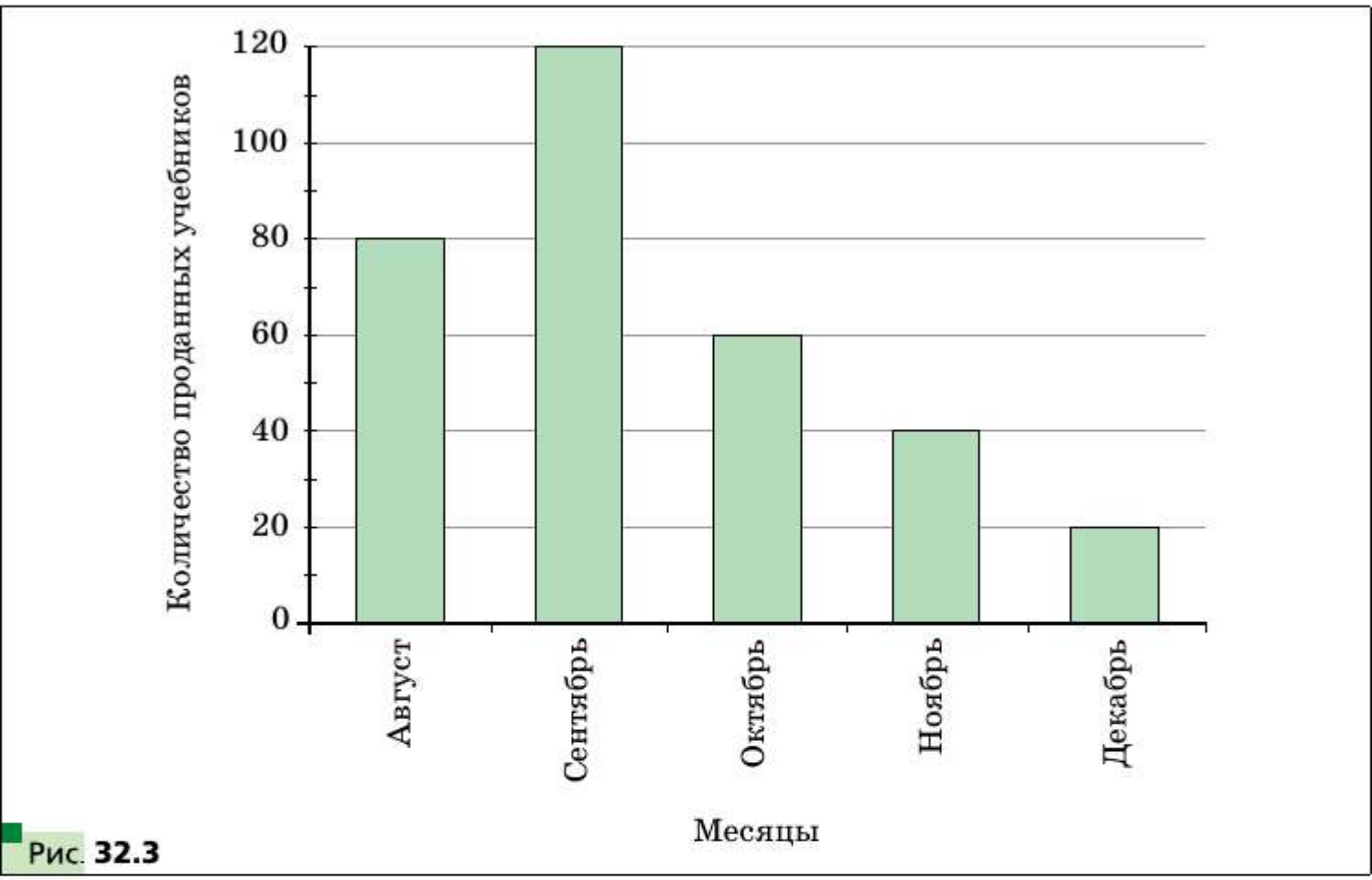


Рис. **32.3**

32.4. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных:

1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;

2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

32.5. Девушки 9 класса на уроке физкультуры сдавали зачёт по прыжкам в высоту. Учитель записал такую последовательность результатов: 105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах полученных данных.

32.6. Классный руководитель 9 класса ведёт учёт посещения учащимися занятий. В конце недели его записи выглядели так.

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница
Количество отсутствующих	3	2	5	4	8

1) Найдите, сколько учащихся отсутствовало в среднем в день в течение этой недели.

2) Найдите моду полученных данных.

32.7. В 9 классе, в котором учится 23 ученика, провели опрос: сколько часов в день тратит девятиклассник на выполнение домашних заданий. Ответы учащихся представлены в виде гистограммы (рис. 32.4).

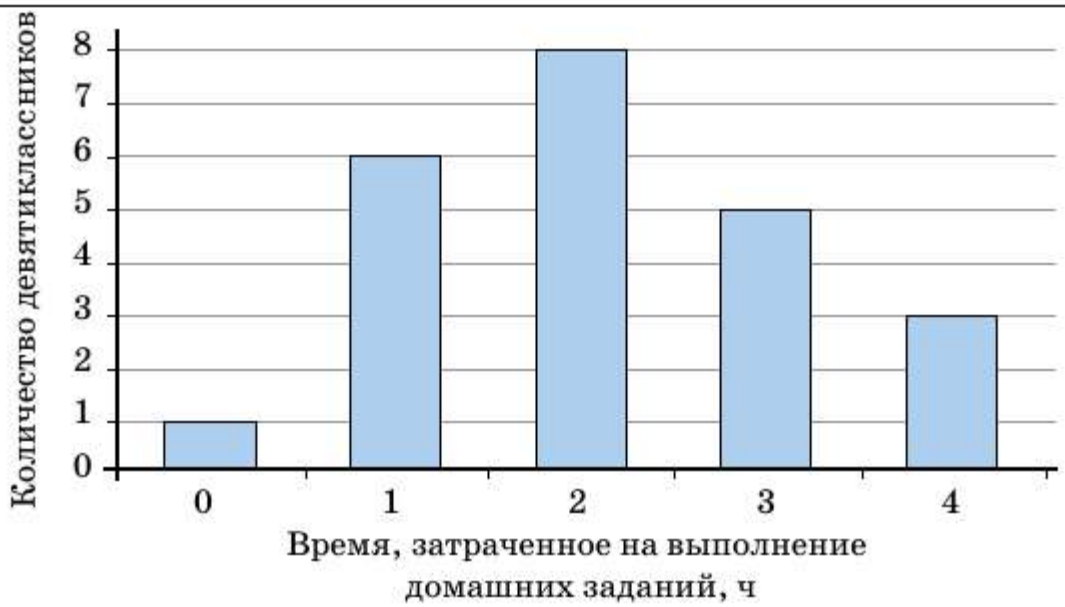


Рис. **32.4**

1) Заполните частотную таблицу.

Время, затраченное на выполнение домашних заданий, ч	0	1	2	3	4
Частота					
Относительная частота, %					

2) Сколько времени в день в среднем учащийся этого класса выполняет домашнее задание? (Найдите среднее значение ряда данных.)

3) Сколько времени выполняет домашнее задание большинство учеников этого класса? (Найдите моду ряда данных.)

32.8. В таблице приведено распределение по возрасту отдыхающих в молодёжном спортивном лагере в один из летних месяцев.

Возраст, лет	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Количество отдыхающих	12	21	20	32	20	20	19	24	15	17
Относительная частота, %										

1) Заполните третью строку таблицы.

2) Найдите моду и среднее значение полученных данных.

32.9. Учащихся одной пятигорской школы опросили, сколько раз они летали на самолёте. Полученные данные приведены в таблице.

Количество полётов	0	1	2	3	4	5
Количество учащихся	280	92	56	38	20	14
Относительная частота, %						

1) Заполните третью строку таблицы.

2) Представьте полученные данные в виде столбчатой диаграммы.

3) Найдите моду и среднее значение полученных данных.

4) Поясните, можно ли считать рассматриваемую выборку репрезентативной для выводов относительно всех школьников города Пятигорска.

32.10. В течение первых десяти дней мая температура воздуха в 6 ч утра была такой: 16 °С; 14 °С; 12 °С; 16 °С; 15 °С; 15 °С; 13 °С; 15 °С; 17 °С; 14 °С. Найдите меры центральной тенденции полученной совокупности данных. Заполните частотную таблицу.

Температура воздуха, °С	
Частота	
Относительная частота, %	

32.11. В таблице приведено распределение сотрудников детского сада соответственно стажу работы.

Стаж работы в годах	3	6	10	12	15	16	20
Количество сотрудников	2	4	4	3	2	4	5

Найдите моду и среднее значение выборки, постройте соответствующую гистограмму.

32.12. У 24 легковых автомобилей сделали замеры расхода горючего на 100 км пути и получили ряд данных: 8 л, 9 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 8,5 л, 9 л, 8 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 7,5 л, 8,5 л, 8 л, 7,5 л, 8,5 л, 10 л, 8,5 л, 9 л, 8 л, 7,5 л.

1) Составьте частотную таблицу.
2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.
3) Постройте соответствующую гистограмму.

32.13. Во время тестирования по алгебре 25 учеников 9 класса сделали следующее количество ошибок: 4, 3, 3, 1, 3, 4, 4, 5, 3, 0, 1, 4, 4, 4, 5, 3, 5, 4, 0, 4, 1, 4, 2, 2, 3.
1) Составьте частотную таблицу.
2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.
3) Постройте соответствующую гистограмму.

32.14. Выпишите все ваши оценки по алгебре, полученные в течение года. Найдите среднее значение, моду и медиану полученного ряда данных.

32.15. Директор фирмы получает 120 000 р. в месяц, два его заместителя по 80 000 р., а остальные 17 работников фирмы — по 20 000 р. в месяц. Найдите среднее значение, моду, медиану заработной платы в этой фирме.

32.16. Прочтите отрывок из стихотворения А.С. Пушкина.

Унылая пора! Очей очарованье!
Приятна мне твоя прощальная краса —
Люблю я пышное природы увяданье,
В багрец и в золото одетые леса,
В их сенях ветра шум и свежее дыханье,
И мглой волнистою покрыты небеса,
И редкий солнца луч, и первые морозы,
И отдалённые седой зимы угрозы.

Составьте частотную таблицу наличия букв «а», «е», «и», «б», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» в данном стихотворении. Определите моду полученных данных.

32.17. Постройте ряд: 1) из пяти чисел; 2) из шести чисел, у которого:
а) среднее значение равно медиане;
б) среднее значение больше медианы.

32.18. Даны два набора чисел: 6, 7, 8, 9 и 1, 5, 10, 14. Отметьте каждый из этих наборов на координатной прямой. Найдите дисперсии этих наборов и сравните полученные результаты.

Упражнения для повторения

32.19. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{x+4}+\sqrt{y^2-1}=0$.

32.20. Упростите выражение $\left(\dfrac{1+\sqrt{2-a}}{2-a+\sqrt{2-a}}-\dfrac{1-\sqrt{2-a}}{2-a-\sqrt{2-a}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{2}{a}-1}$, если $0<a<2$.

§ 33 Операции над событиями

В 8 классе вы ознакомились с понятием события (случайного события), выяснили, какие события называют достоверными, невозможными, равновероятными. Вы узнали, что вероятность события можно оценивать по его частоте, научились находить вероятность события в опытах с равновозможными результатами.

В теории вероятностей нередко бывает так, что в одном испытании необходимо установить те или иные соотношения между несколькими событиями. Этот параграф посвящён изучению таких соотношений.

Рассмотрим опыт, состоящий в подбрасывании игрального кубика. В этом испытании рассмотрим следующие события:

A — «на кубике выпала тройка»,

B — «на кубике выпало чётное число»,

C — «на кубике выпало нечётное число».

Очевидно, что в этом опыте события A и B не могут произойти одновременно.

Определение

Если в некотором испытании два события не могут произойти одновременно, то их называют несовместными.

Таким образом, в опыте с подбрасыванием игрального кубика события A и B являются несовместными. События B и C также являются несовместными. Пару же событий A и C нельзя назвать несовместными. Действительно, если при подбрасывании кубика выпадет тройка, то одновременно произойдёт и событие A, и событие C.

Приведём ещё один пример. Внутри прямоугольника $ABCD$ наугад выбирают точку (рис. 33.1). Пусть событие X состоит в том, что выбранная точка принадлежит кругу синего цвета, а событие Y — в том, что выбранная точка принадлежит треугольнику красного цвета.

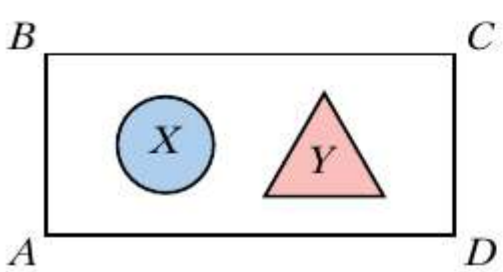


Рис. 33.1

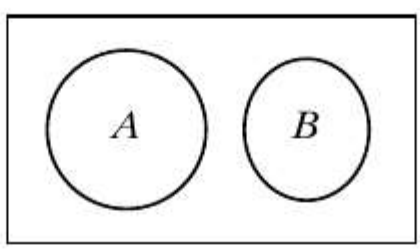


Рис. 33.2

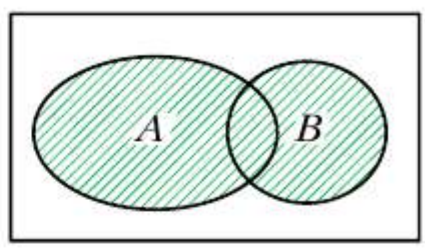


Рис. 33.3

Поскольку синий круг не имеет общих точек с красным треугольником, то события X и Y являются несовместными.

Испытание с выбором точки внутри прямоугольника часто используют для иллюстраций тех или иных соотношений между событиями. Например, несовместные события A и B иллюстрируют двумя непересекающимися фигурами A и B (рис. 33.2). Такие рисунки называют диаграммами Эйлера.

В дальнейшем, рассматривая соотношения между событиями, будем считать, что эти события относятся к одному опыту.

Обратимся к следующему примеру. Для жеребьёвки подготовили жетоны с номерами от 1 до 5. Рассмотрим следующие события:

U — «участник вытянул жетон с одним из следующих номеров: 1, 2, 3»;

V — «участник вытянул жетон с одним из следующих номеров: 3, 4»;

W — «участник вытянул жетон с одним из следующих номеров: 1, 2, 3, 4».

Заметим, что событие W происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из двух событий U или V.

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из двух событий A или B, называют объединением событий A и B. Объединение событий A и B обозначают $A \cup B$.

Таким образом, в опыте с жеребьёвкой событие W является объединением событий U и V, т. е. $W = U \cup V$.

На диаграмме Эйлера (рис. 33.3) проиллюстрировано объединение событий A и B.

Объединение событий A и B — это пример операции над событиями.

Аналогично определяют объединение трёх или большего количества событий.

Пример 1. В коробке лежат красные, синие и белые шары. Из коробки наугад вытягивают один шар. Событие A состоит в том, что вытянутый шар окажется красным; а событие B — в том, что он окажется синим. Найдите вероятность события $A \cup B$, если $p(A) = \frac{1}{2}$, а $p(B) = \frac{1}{3}$.

Решение. Событие $A \cup B$ состоит в том, что вытянутый наугад шар окажется или красным, или синим. Естественно предположить, что искомая вероятность будет равна сумме $p(A) + p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Обоснуем это предположение. Пусть в коробке лежит n шаров, из которых a красных и b синих. Тогда вероятность события A равна $p(A) = \frac{a}{n}$. Аналогично, вероятность события B равна $p(B) = \frac{b}{n}$.

События A и B несовместны. Поэтому исходы, благоприятствующие событию A, отличны от исходов, благоприятствующих событию B. Следовательно, событию $A \cup B$ благоприятствует $a + b$ исходов. Таким образом, вероятность того, что наугад вытянутый шар окажется или красным, или синим, равна

$$p(A \cup B) = \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = p(A) + p(B) = \frac{5}{6}.$$

Ответ. $\frac{5}{6}$. ■

Решение примера 1 иллюстрирует следующее важное свойство вероятности: ***вероятность объединения двух несовместных событий A и B любого испытания может быть вычислена по формуле***

$$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B).} \qquad (1)$$

Используя метод математической индукции, равенство (1) можно распространить на три или большее количество попарно несовместных событий:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n).$$

Перейдём к изучению других операций над событиями.

В опыте с подбрасыванием игрального кубика рассмотрим события:

X — «на кубике выпало чётное число»,

Y — «на кубике выпало число, кратное трём»,

Z — «на кубике выпала шестёрка».

Заметим, что событие Z происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходит и событие X, и событие Y.

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит и событие A, и событие B, называют пересечением событий A и B. Пересечение событий A и B обозначают $A \cap B$.

Таким образом, в рассмотренном опыте с игральным кубиком событие Z является пересечением событий X и Y, т. е. $Z = X \cap Y$.

На диаграмме Эйлера (рис. 33.4) проиллюстрировано пересечение событий A и B.

Аналогично определяют пересечение трёх или большего количества событий.

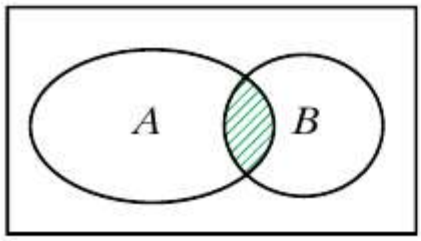


Рис. 33.4

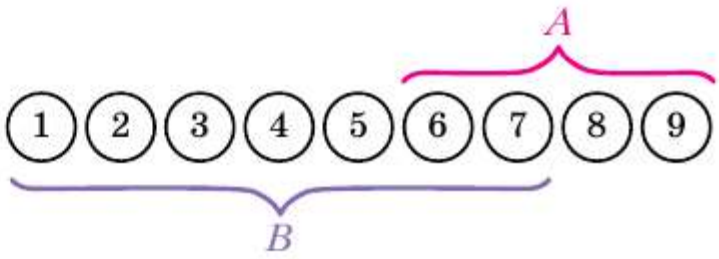


Рис. 33.5

Пример 2. Ученик наугад называет натуральное число от 1 до 9 включительно. Событие A состоит в том, что названное число больше пяти. Событие B состоит в том, что названное число меньше восьми. Найдите вероятность события $A \cap B$.

Решение. Все 9 результатов в этом опыте равновозможны, поэтому для вычисления вероятности события $A \cap B$ воспользуемся классическим определением вероятности.

Событие $A \cap B$ состоит в том, что названное число больше пяти и меньше восьми одновременно, т. е. событие $A \cap B$ происходит, если названо или число 6, или число 7 (рис. 33.5). Событию $A \cap B$ благоприятствуют 2 из 9 равновозможных результатов, поэтому

$$p(A \cap B) = \frac{2}{9}.$$

Ответ: $\frac{2}{9}$. ■

Теорема 32.1

Если A и B — события некоторого испытания, то

$$\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)} \qquad (2)$$

Докажем эту теорему для частного случая — испытания с n равновозможными результатами.

Рассмотрим такую вероятностную модель. Пусть в прямоугольнике отмечено n точек, часть из которых покрашены в красный цвет, а часть имеет больший размер, чем остальные (рис. 33.6).

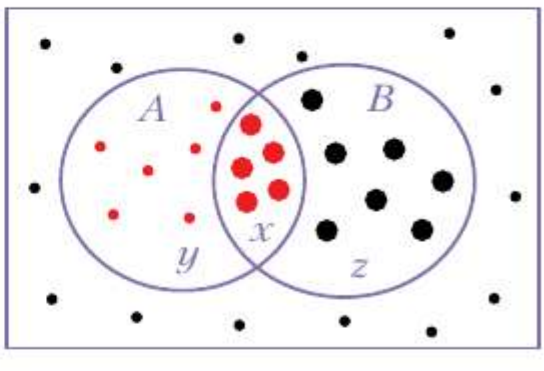


Рис. 33.6

Количество больших красных точек обозначим через x, маленьких красных — через y, а больших чёрных — через z.

Испытание состоит в том, что из отмеченных n точек прямоугольника наугад выбирают одну. В этом испытании событие A состоит в том,

что выбранная точка окажется красной, а событие B — в том, что выбранная точка окажется большой.

Поскольку все исходы в данном опыте равновозможны, то $p(A) = \frac{x+y}{n}$, $p(B) = \frac{x+z}{n}$.

Событие $A \cap B$ состоит в том, что выбранная точка окажется красной и большой одновременно; а событие $A \cup B$ — в том, что выбранная точка окажется красной или большой.

Поэтому $p(A \cap B) = \frac{x}{n}$, $p(A \cup B) = \frac{x+y+z}{n}$.

Учитывая найденные значения вероятностей, перепишем доказываемую формулу (2) в таком виде:

$$\frac{x+y+z}{n} = \frac{x+y}{n} + \frac{x+z}{n} - \frac{x}{n}.$$

Приведя дроби в правой части к общему знаменателю, получим верное равенство, что и доказывает теорему. ■

Обратите внимание на то, что формула (2) является обобщением формулы (1). Действительно, если события A и B несовместны, то они никогда не происходят одновременно; поэтому $p(A \cap B) = 0$.

Пример 3. Каждый ученик курсов иностранных языков изучает или только английский язык, или только немецкий язык, или оба этих иностранных языка сразу. Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранный ученик изучает английский язык, а событие B — в том, что наугад выбранный ученик изучает немецкий язык. Какова вероятность того, что наугад выбранный ученик изучает оба этих иностранных языка сразу, если $p(A) = \frac{3}{4}$, $p(B) = \frac{2}{5}$?

Решение. Событие $A \cup B$ состоит в том, что наугад выбранный ученик изучает английский или немецкий язык. Поскольку каждый ученик курсов изучает хотя бы один иностранный язык, то событие $A \cup B$ является достоверным. Отсюда следует, что $p(A \cup B) = 1$. Используя формулу (2), получаем

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{3}{20}.$$

Отметим, что событие $A \cap B$ состоит в том, что наугад выбранный ученик изучает и английский язык, и немецкий язык, т. е. изучает оба иностранных языка сразу.

Ответ. $\frac{3}{20}$. ■

Пусть A — событие некоторого испытания. Рассмотрим событие B, которое состоит в том, что не произошло событие A. Например, в опыте с игральным кубиком рассмотрим событие A — «на кубике выпало чётное число». Тогда событие B — «на кубике выпало нечётное число».

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда не происходит событие A, называют дополнением события A. Дополнение события A обозначают $\overline{A}$.

Таким образом, в рассмотренном опыте с игральным кубиком событие B является дополнением события A, т. е. $B = \overline{A}$. Также можно сказать, что $A = \overline{B}$.

На диаграмме Эйлера (рис. 33.7) проиллюстрировано дополнение события A.

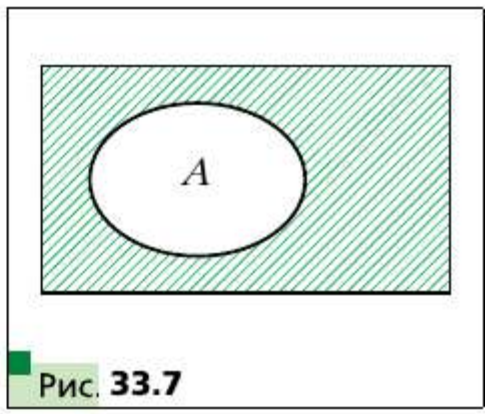


Рис. **33.7**

Отметим, что события A и $\overline{A}$ всегда несовместны. Действительно, они не могут произойти одновременно, поскольку одно из них всегда происходит только тогда, когда не происходит другое.

Кроме того, объединение событий A и $\overline{A}$ равно достоверному событию. Действительно, при любом исходе испытания одно из событий A или $\overline{A}$ обязательно произойдёт. Поскольку вероятность достоверного события равна 1, то $p(A \cup \overline{A}) = 1$. Учитывая тот факт, что события A и $\overline{A}$ несовместны, а также формулу (1), можно записать равенство

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1.$$

Это равенство используют, например, для вычисления вероятности дополнения события.

1. Какие события называют несовместными?
2. Какое событие называют объединением двух событий и как его обозначают?
3. Какое событие называют пересечением двух событий и как его обозначают?
4. Какое событие называют дополнением события и как его обозначают?
5. Чему равна вероятность объединения двух несовместных событий?
6. Как можно вычислить вероятность объединения двух событий?
7. Как можно вычислить вероятность дополнения события?

Упражнения

33.1. Являются ли события A и B несовместимыми, если опыт состоит в том, что:

1) монету подбрасывают один раз, A — «выпал герб», B — «выпало число»;

2) игральный кубик подбрасывают два раза, A — «выпала единица при первом броске», B — «выпала шестёрка при втором броске»;

3) в мишень стреляют два раза, A — «в мишень попали дважды», B — «в мишень попали ровно один раз»?

33.2. Библиотекарь школьной библиотеки берёт наугад один из учебников. Среди следующих событий найдите пары несовместных:

A — «взят учебник по математике»,

B — «взят учебник для 9 класса»,

C — «взят учебник по физике для 10 класса»,

D — «взят учебник, изданный до 2010 г.»,

E — «взят учебник по гуманитарному предмету».

33.3. Шоколадка «Супер-Сюрприз» содержит внутри игрушку или для мальчика (машинку или фигурку пирата), или для девочки (куклу или браслет). Событие A состоит в том, что выбранный наугад «Супер-Сюрприз» содержит игрушку для мальчика; а событие B — в том, что «Супер-Сюрприз» содержит браслет. Найдите среди событий X, Y, Z, T событие: 1) $\bar{A}$; 2) $A \cup B$; 3) $A \cap \bar{B}$, где:

X — «„Супер-Сюрприз“» содержит куклу»,

Y — «„Супер-Сюрприз“» содержит игрушку для девочки»,

Z — «„Супер-Сюрприз“» содержит машинку или фигурку пирата»,

T — «„Супер-Сюрприз“» не содержит куклу».

33.4. Диаграмма (рис. 33.8) иллюстрирует событие A, состоящее в том, что наугад выбранный ученик 9 «А» класса имеет светлые волосы. Каждая красная точка на диаграмме представляет ученика. Найдите вероятность того, что наугад выбранный ученик 9 «А»: 1) имеет светлые волосы; 2) имеет тёмные волосы.

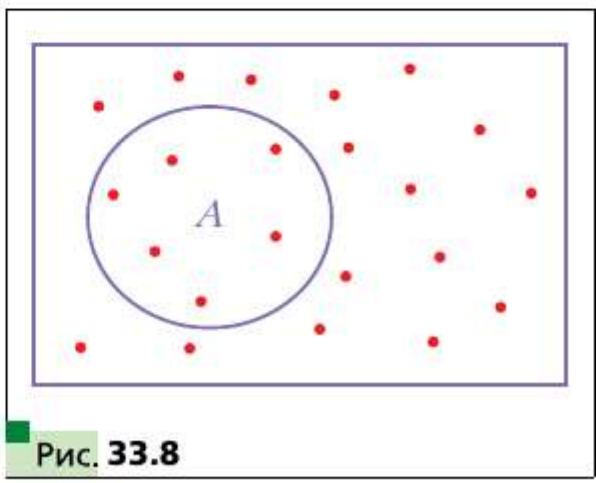


Рис. **33.8**

33.5. Среди членов спортклуба выбирают наугад одного человека. Событие A состоит в том, что выбранный человек занимается в тренажёрном зале, а событие B — в том, что он плавает в бассейне.

В чём состоит событие, проиллюстрированное на диаграмме (рис. 33.9)?

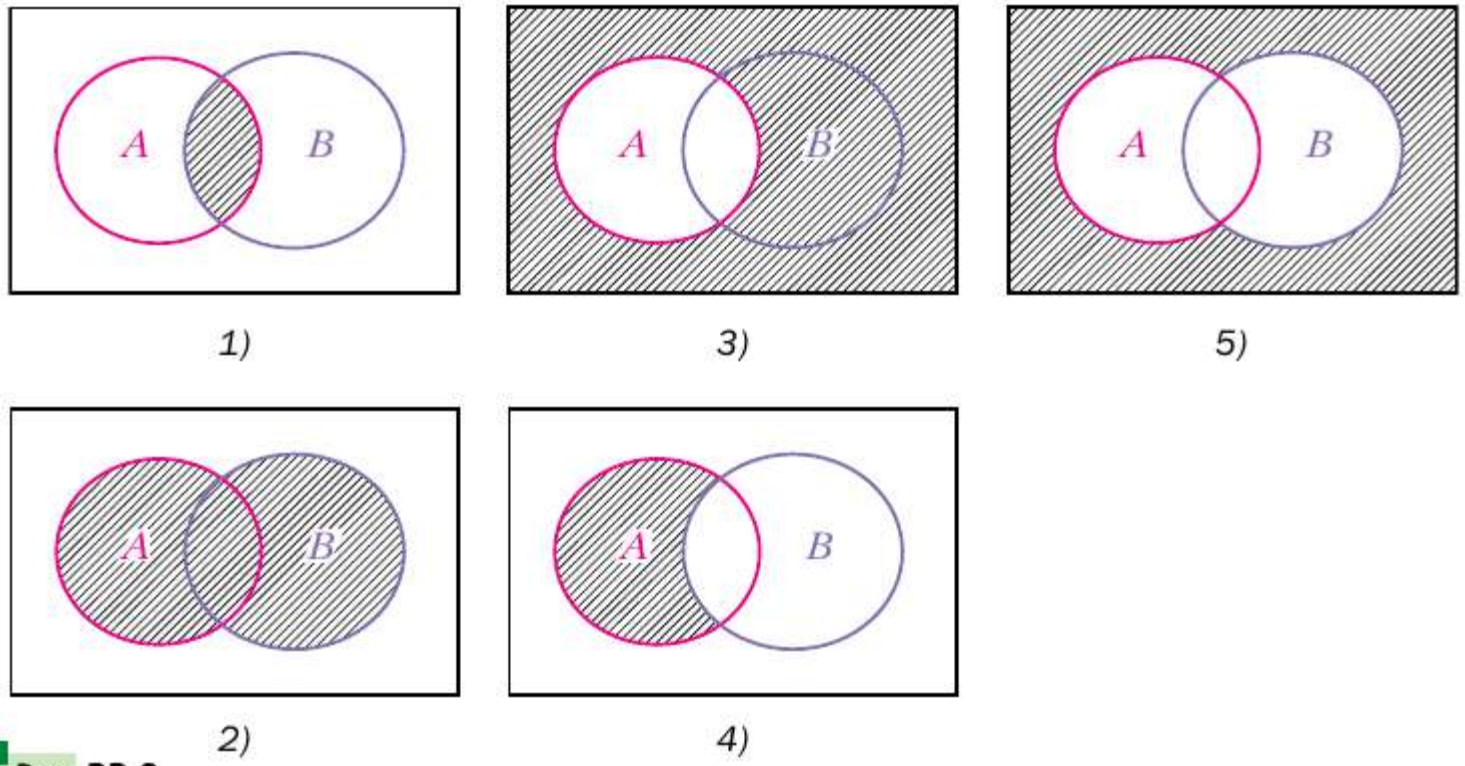


Рис. **33.9**

33.6. На диаграмме (рис. 33.10) проиллюстрированы события A и B. Перерисуйте диаграмму в тетрадь и заштрихуйте ту область, которая иллюстрирует следующее:

1) произошло событие A, но не произошло событие B;

2) произошло событие B, но не произошло событие A;

3) не произошло ни событие A, ни событие B.

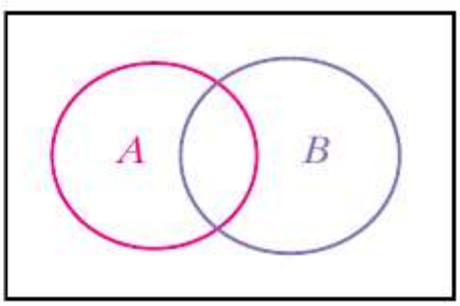


Рис. **33.10**

33.7. Опыт состоит в том, что из множества $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ наугад выбирают один элемент. В этом опыте рассматривают следующие события:

A — выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 3\}$,

B — выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 2, 5\}$,

C — выбранный элемент принадлежит множеству $\{4, 5\}$.

Какой элемент мог быть выбран, если произошло событие:

1) $A \cap B$; 3) $\overline{B}$; 5) $A \cup B \cup C$?

2) $B \cup C$; 4) $\overline{A} \cap C$;

33.8. Опыт состоит в том, что наугад выбирают действительное число. В этом опыте рассматривают следующие события:
A — выбранное число принадлежит промежутку $[0; 4]$,
B — выбранное число принадлежит промежутку $(0; +\infty)$,
C — выбранное число принадлежит промежутку $[2; 7)$.
Запишите с помощью числовых промежутков множество, которому принадлежит выбранное число, если произошло событие:

1) $A \cup B$; 3) $\overline{B}$; 5) $A \cap B \cap C$.

2) $A \cap C$; 4) $A \cap \overline{C}$;

33.9. Перед футбольным матчем «Локомотив» — «Зенит» болельщики обсуждают такие события:
A — «„Зенит“» не проиграет»;
B — «матч закончится вничью со счётом 1:1»;
C — «„Локомотив“» победит со счётом 2:0»;
D — «в матче забьют не более трёх голов».
Какой счёт может быть на табло после окончания матча, если произойдёт событие:

1) $A \cap B$; 3) $A \cap D$; 5) $\overline{C} \cup \overline{D}$?

2) $B \cup C$; 4) $\overline{A \cup C}$;

33.10. Событие A состоит в том, что наугад выбранный посетитель бассейна умеет плавать брассом, событие B — в том, что он умеет плавать на спине. На диаграмме (рис. 33.11) указано количество людей в одной или другой группе. Найдите вероятность события:

1) A; 3) $A \cup B$;

2) $\overline{B}$; 4) $\overline{A} \cap \overline{B}$.

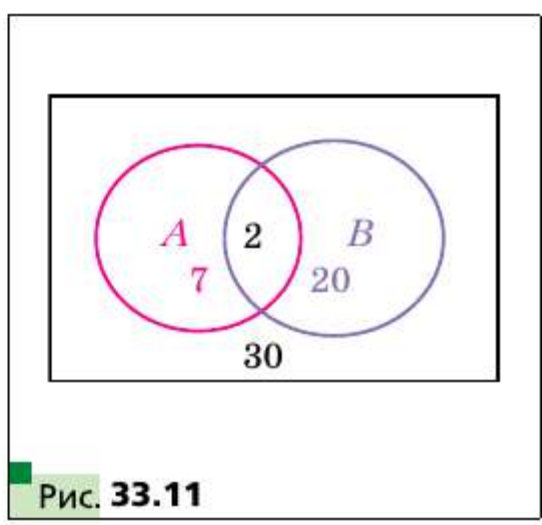


Рис. **33.11**

33.11. Используя условие предыдущей задачи, найдите вероятность события:

1) B; 2) $\overline{A}$; 3) $A \cap B$; 4) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

33.12. Стрелок делает два выстрела — сначала в большую мишень, а потом в маленькую. Вероятность того, что он попадёт только в большую мишень, равна 28 %. Вероятность того, что он попадёт только в маленькую мишень, равна 18 %. Найдите вероятность того, что из двух выстрелов стрелок попадёт в мишень только один раз.

33.13. Ученики 8 и 9 классов решили сыграть между собой один матч в футбол и один матч в баскетбол. Вероятность того, что сборная

команда 8 классов выиграет у команды 9 классов только в футбол, равна 36 %, только в баскетбол — 16 %. Какова вероятность того, что сборная команда 8 классов выиграет ровно один из двух сыгранных матчей?

33.14. От остановки в центр города можно добраться автобусом, троллейбусом и трамваем. Человек, едущий в центр, садится на тот вид транспорта, который придёт на остановку первым. Известно, что автобус приходит первым с вероятностью 0,6, троллейбус — 0,25, трамвай — 0,15. Какова вероятность того, что человек отправится в центр не на трамвае?

33.15. В столовой предлагается три первых блюда — солянка, борщ и уха. Среди покупающих первое блюдо солянку выбирает каждый второй, борщ — каждый третий, а уху — каждый шестой человек. Какова вероятность того, что очередной посетитель, купивший первое блюдо, не выберет борщ?

◆ ◆ ◆

33.16. Среди абитуриентов механико-математического факультета университета есть призёры областных олимпиад и отличники. Вероятность встретить среди абитуриентов призёра областной олимпиады равна 18 %, отличника — 37 %, а призёра областной олимпиады или отличника — 43 %. Какова вероятность встретить среди абитуриентов призёра областной олимпиады и отличника в одном лице?

33.17. Выпускник университета хочет работать в банке или в страховой компании. Побывав в этих учреждениях на собеседованиях, он оценивает вероятность быть принятым на работу в банк в 0,6, а в страховую компанию — в 0,7. Кроме того, он считает, что ему поступит предложение из обоих мест с вероятностью 0,5. Как он должен оценить вероятность быть принятым на работу?

33.18. Международные финансовые аналитики провели исследование и выяснили, что вероятность роста курса евро к доллару в следующем месяце составляет 0,52, вероятность роста курса швейцарского франка к доллару — 0,34, а вероятность того, что вырастут курсы обеих европейских валют к доллару, — 0,18. Найдите вероятность того, что вырастет курс по крайней мере одной европейской валюты.

33.19. Гидрометцентр прогнозирует температуру и влажность воздуха на ближайшие дни. Вероятность того, что влажность повысится до 100 % или температура понизится на 5 °C, равна 90 %, а вероятность того, что и влажность повысится до 100 %, и температура понизится на 5 °C, — 45 %. Какова вероятность того, что в ближайшие

дни температура воздуха понизится на 5 °С, если вероятность того, что влажность повысится до 100 %, равна 60 %?

33.20. В неисправной люстре поменяли на новые выключатель и лампочку. Вероятность того, что лампочка проработает не менее года, составляет 0,95, а выключатель — 0,97. Кроме того, известно, что с вероятностью 0,01 в течение года могут выйти из строя и лампа, и выключатель одновременно. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить:

1) только лампочку;
2) только выключатель;
3) лампочку или выключатель;
4) ровно один из двух новых элементов люстры?

33.21. Петя и Андрей пришли на озеро ловить рыбу. Вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом, у Пети равна 50 %, а у Андрея — 60 %. Вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом хотя бы у одного из мальчиков, равна 65 %. Какова вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом:

1) и у Пети, и у Андрея;
2) только у Пети;
3) только у Андрея;
4) только у одного из мальчиков?

Упражнения для повторения

33.22. Упростите выражение $\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}}$, если $x \geqslant y > 0$.

33.23. Докажите тождество

$$\left(\frac{a-2b}{a^2+2ab} - \frac{1}{a^2-4b^2} : \frac{a+2b}{(2b-a)^2}\right) : \frac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2} = \frac{2b}{a^2}.$$

§ 34 Зависимые и независимые события

Рассмотрим опыт, состоящий в том, что игральный кубик подбрасывают дважды. На рисунке 34.1 показаны все 36 равновозможных результатов этого испытания. Пусть событие A состоит в том, что сумма чисел, выпавших на кубике при первом и втором бросках, равна 12. Событие A происходит только в одном случае — когда оба раза выпадут шестёрки. Поэтому $p(A) = \frac{1}{36}$.

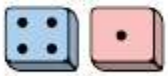
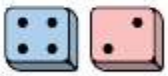
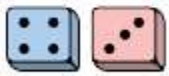
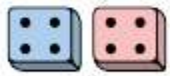
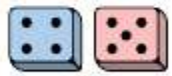
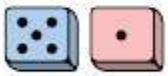
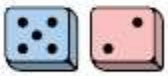
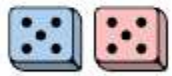
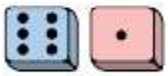
Количество очков на синем кубике	Количество очков на красном кубике					
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Рис. **34.1**

Поставим такой вопрос. Изменится ли вероятность события A, если известно, что при первом подбрасывании выпала шестёрка (состоялось событие B)? Наш опыт подсказывает, что вероятность события A должна измениться. Действительно, если при первом подбрасывании выпала шестёрка, то для наступления события A при втором подбрасывании тоже должна выпасть шестёрка. Вероятность выпадения шестёрки при втором подбрасывании равна $\frac{1}{6}$. Поэтому вероятность события A при условии выпадения шестёрки при первом броске равна $\frac{1}{6}$.

Вообще, если речь идёт о вероятности события A при условии, что произошло событие B, то такую вероятность обозначают $p_B(A)$ и называют **условной вероятностью**.

Таким образом, в рассмотренном опыте $p_B(A) = \frac{1}{6}$.

Пример 1. Из коробки, в которой лежат два красных и четыре синих шара, наугад берут сначала один шар, а потом ещё один. Событие A состоит в том, что первый взятый шар окажется красным, а событие B — в том, что второй взятый шар окажется красным. Вычислите $p_A(B)$.

Решение. Если произошло событие A, то первый взятый шар — красный. Это значит, что перед вытягиванием второго шара в коробке находятся один красный шар и четыре синих. Поэтому вероятность того,

что в этой ситуации второй взятый шар также окажется красным, равна $\frac{1}{5}$, т. е. $p_A(B) = \frac{1}{5}$. ■

Решения задач на вычисление условных вероятностей удобно иллюстрировать с помощью древовидной схемы — **дендрограммы** (от лат. *dendro* — дерево и англ. *-gram* — суффикс со значением «запись, изображение»). Например, опыт из примера 1 можно проиллюстрировать дендрограммой, на которой представлены все возможные результаты в данном испытании (рис. 34.2).

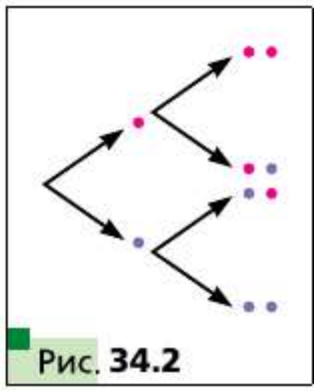


Рис. **34.2**

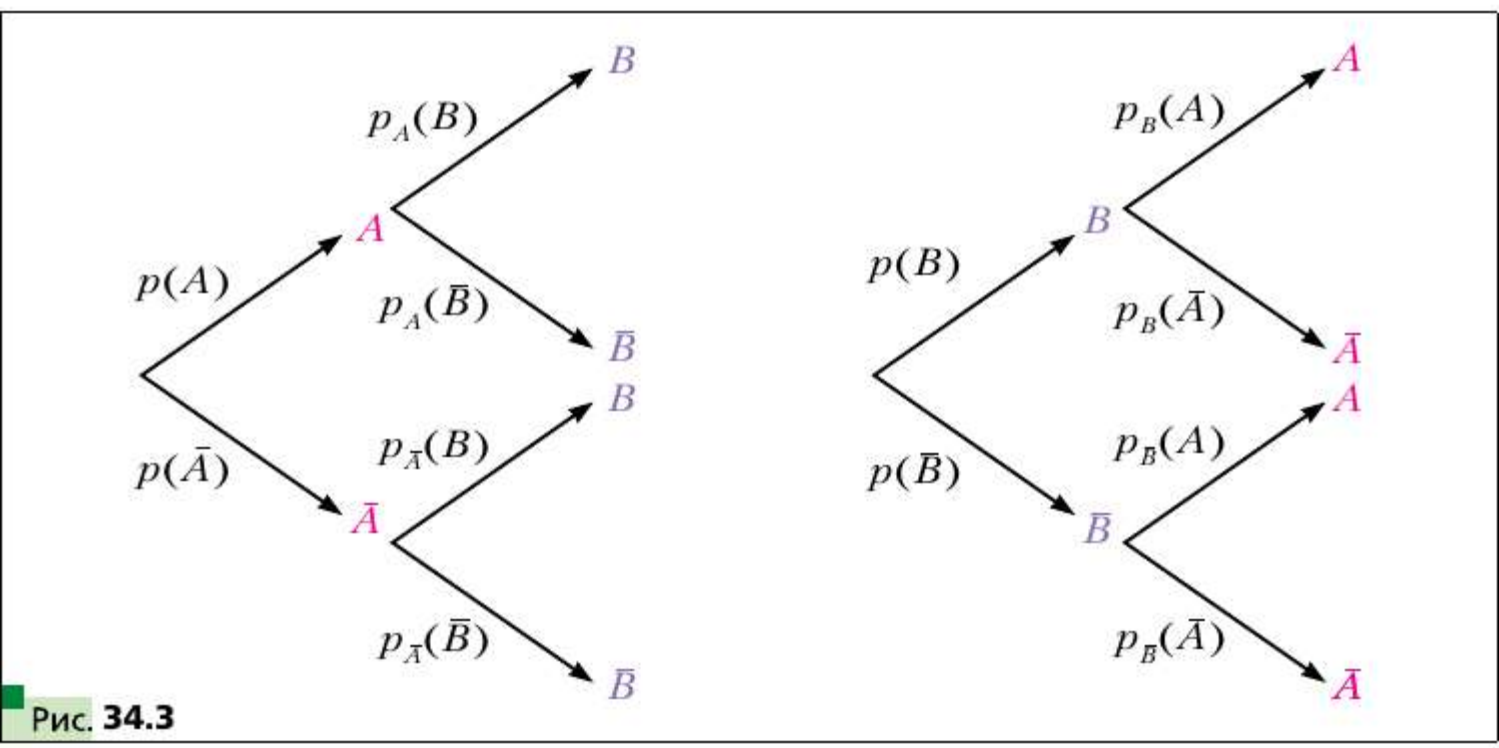


Рис. **34.3**

Если в некотором испытании речь идёт о двух события A и B, то для иллюстрации можно использовать, например, дендрограммы, изображённые на рисунке 34.3.

Возле стрелок дендрограммы удобно ставить значения вероятностей соответствующих событий. Например, расставив значения вероятностей на дендрограмме примера 1, получим схему, изображённую на рисунке 34.4. Правильность вычисления этих вероятностей предлагаем вам проверить самостоятельно.

Заметим, что стрелки, выходящие из одной точки, обозначают события, каждое из кото-

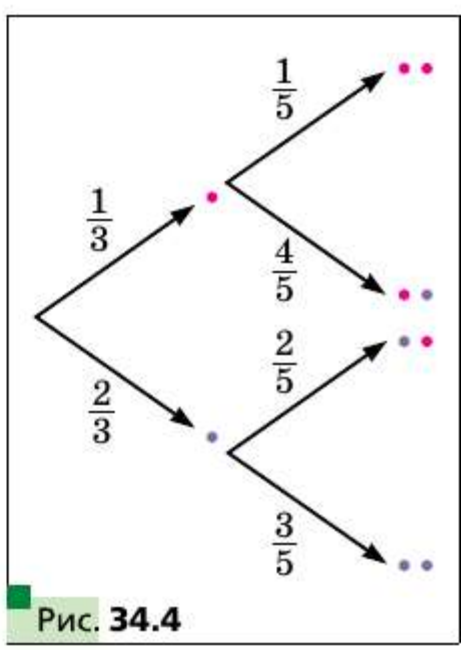


Рис. **34.4**

рых является дополнением другого. Поэтому сумма вероятностей событий, стоящих возле таких стрелок, равна 1.

Теорема 34.1

Пусть A и B — события некоторого испытания. Тогда

$$p(A \cap B) = p(A)\, p_A(B).$$

Докажем эту теорему для частного случая, который описывается следующей вероятностной моделью.

Пусть в прямоугольнике отмечено n точек, часть из которых покрашены в красный цвет, а часть имеют больший размер, чем остальные (рис. 34.5).

Количество больших красных точек обозначим через x, маленьких красных — через y, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Испытание состоит в том, что из отмеченных n точек прямоугольника наугад выбирают одну. В этом испытании событие A состоит в том, что выбранная точка окажется красной, а событие B — в том, что выбранная точка окажется большой.

Поскольку все исходы в данном опыте равновозможны, то $p(A) = \dfrac{x+y}{n}$.

Событие $A \cap B$ состоит в том, что выбранная точка окажется красной и большой одновременно. Поэтому $p(A \cap B) = \dfrac{x}{n}$.

Вычислим вероятность $p_A(B)$. Если произошло событие A, т. е. выбрана красная точка, то это означает, что из n равновозможных исходов опыта имеет смысл рассматривать только $x + y$ красных точек (рис. 34.6).

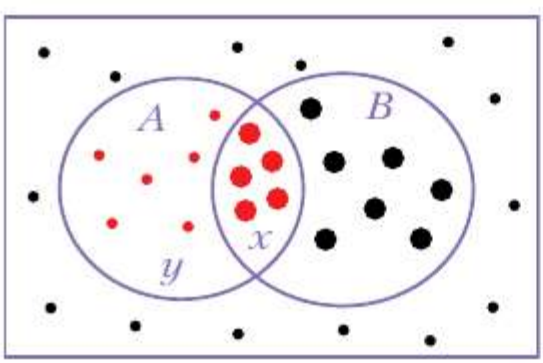


Рис. 34.5

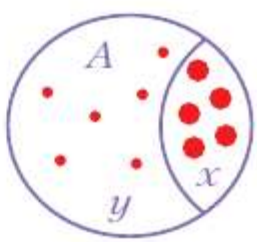


Рис. 34.6

Из этих $x + y$ равновозможных исходов событию B благоприятствуют только x результатов. Поэтому $p_A(B) = \dfrac{x}{x+y}$.

Таким образом, установлено, что

$$p(A)p_A(B) = \frac{x+y}{n} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{x}{n} = p(A \cap B). \blacksquare$$

Пример 2. Известно, что озимая рожь успешно переносит зиму с вероятностью $\frac{9}{10}$. Если озимая рожь успешно перенесёт зиму, то вероятность того, что и озимая пшеница успешно перезимует, равна $\frac{13}{15}$. Если же озимую рожь весной придётся пересевать, то вероятность того, что придётся пересевать и озимую пшеницу, равна $\frac{4}{5}$. Найдите:

1) вероятность того, что и рожь, и пшеница успешно перезимуют;

2) вероятность того, что пшеница успешно перезимует, а рожь придётся пересевать;

3) вероятность того, что пшеница успешно перезимует.

Решение. 1) Обозначим через A и B события, состоящие в том, что успешно перенесут зиму рожь и пшеница соответственно. Тогда данные задачи можно проиллюстрировать дендрограммой, изображённой на рисунке 34.7.

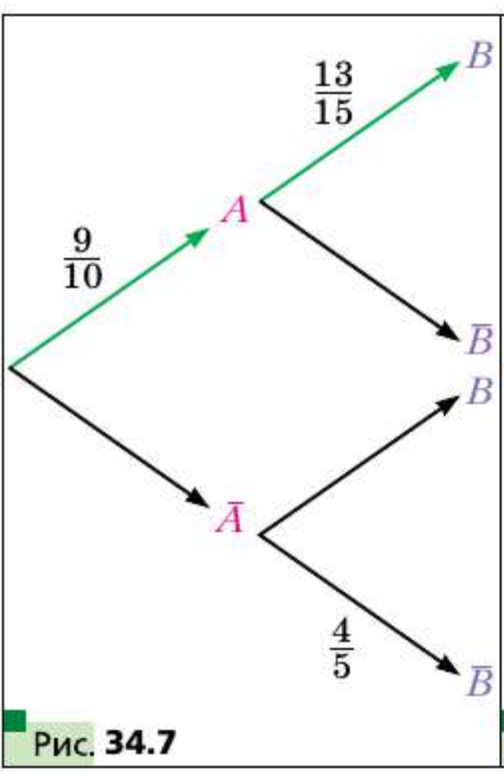


Рис. **34.7**

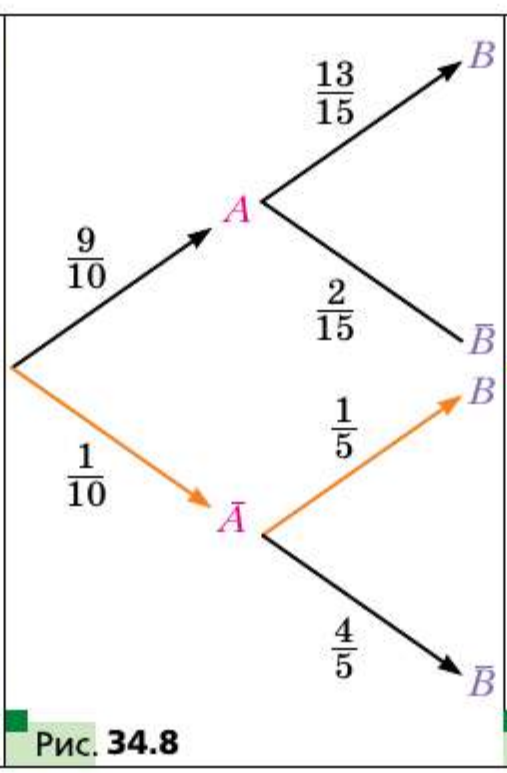


Рис. **34.8**

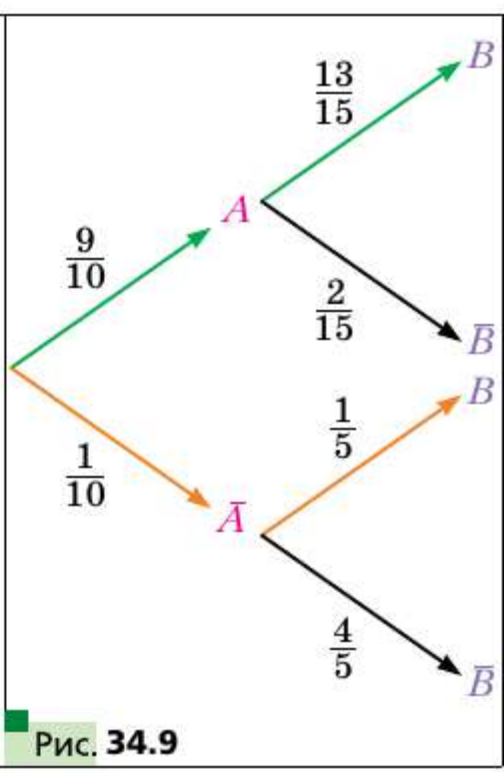


Рис. **34.9**

Рожь и пшеница успешно перезимуют, если произойдут и событие A, и событие B (зелёные стрелки на дендрограмме). Учитывая формулу теоремы 34.1, получаем, что

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{15} = \frac{39}{50} = 78\ \%.$$

2) Учитывая формулу вероятности дополнения события $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, расставим вероятности над всеми стрелками дендрограммы (рис. 34.8).

Пшеница успешно перезимует, а рожь придётся пересевать, если произойдут и событие B, и событие $\overline{A}$ (жёлтые стрелки на дендрограмме). Учитывая формулу теоремы 34.1, получаем, что

$$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = 2\ \%.$$

3) Пшеница успешно перезимует (событие B) при одном из двух вариантов — рожь успешно перезимует (событие A) или рожь придётся пересевать (событие $\overline{A}$). Эти два варианта проиллюстрированы на дендрограмме (рис. 34.9) зелёной и жёлтой ветками.

Это означает, что событие B является объединением двух событий: $A \cap B$ (зелёная ветка) и $\overline{A} \cap B$ (жёлтая ветка). Поскольку события A и $\overline{A}$ являются несовместными, то события $A \cap B$ и $\overline{A} \cap B$ также являются несовместными. Поэтому

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 78\ \% + 2\ \% = 80\ \%. \blacksquare$$

Определение

Пусть A и B — события некоторого испытания. Если вероятность события A не изменяется от того, произошло ли событие B, а вероятность события B не изменяется от того, произошло ли событие A, то события A и B называют независимыми.

Например, пусть игральный кубик подбрасывают дважды и при первом броске выпала шестёрка (событие A). Сообщение о том, что произошло событие A, не изменяет шансы выпадения при втором подбрасывании кубика, например, тройки (событие B). Точно так же информация о том, что при втором подбрасывании кубика выпала тройка, не изменяет вероятности того, что при первом подбрасывании кубика выпала шестёрка. Следовательно, события A и B являются независимыми.

Говоря другими словами, ***события A и B независимы в том и только в том случае, когда $p_A(B) = p(B)$ и $p_B(A) = p(A)$.***

Если одно из равенств $p_A(B) = p(B)$ или $p_B(A) = p(A)$ не выполняется, то события A и B называют **зависимыми**. Например, пусть игральный кубик подбрасывают один раз. Если событие A состоит в том, что на игральном кубике выпало чётное число, а событие B — в том, что на игральном кубике выпала двойка, то $p(B) = \frac{1}{6}$, а $p_A(B) = \frac{1}{3}$. Поэтому $p_A(B) \neq p(B)$, т. е. такие события A и B являются зависимыми.

Теорема 34.2

Если события A и B некоторого испытания являются независимыми, то

$$p(A \cap B) = p(A)\,p(B).$$

Доказательство

Если события A и B независимы, то $p_A(B) = p(B)$. Используя равенство теоремы 34.1, получаем

$$p(A \cap B) = p(A)\ p_A(B) = p(A)p(B). \blacksquare$$

Понятие независимости событий можно обобщить для трёх и большего количества событий. В таком случае также имеет место утверждение: ***если события некоторого испытания являются независимыми, то вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей***[1].

Пример 3. Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что из трёх последовательных независимых выстрелов стрелок попадёт в мишень только с третьего раза.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что стрелок не попадёт в мишень при первом выстреле, событие B — в том, что он не попадёт в мишень при втором выстреле, а событие C — в том, что он попадёт в мишень при третьем выстреле. Отметим, что $p(A) = 0{,}1$; $p(B) = 0{,}1$; $p(C) = 0{,}9$.

Стрелок попадёт в мишень только с третьего раза, если произойдут и событие A, и событие B, и событие C, т. е. произойдёт событие $A \cap B \cap C$. Вычислим $p(A \cap B \cap C)$.

Поскольку выстрелы производятся независимо один от другого, то события A, B и C будут независимыми. Поэтому

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)\,p(B)\,p(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}009. \blacksquare$$

Пример 4. Два завода производят зонты. Первый завод производит 30 %, а второй 70 % всего объёма зонтов. Вероятность купить бракованный зонт равна 1 %, если он изготовлен на первом заводе, и равна 3 %, если на втором. Найдите вероятность того, что наугад выбранный зонт окажется бракованным.

Решение. Пусть события A_1 и A_2 состоят в том, что выбранный зонт изготовлен соответственно на первом и втором заводах, а событие B — в том, что выбранный зонт оказался бракованным. Тогда события $A_1 \cap B$ и $A_2 \cap B$ состоят в том, что бракованный зонт является изделием соответственно первого и второго заводов. Следовательно, событие B можно

[1] Иногда это свойство используют в качестве определения независимых (независимых в совокупности) событий.

представить как объединение событий $A_1 \cap B$ и $A_2 \cap B$, т. е. $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$. События $A_1 \cap B$ и $A_2 \cap B$ являются несовместными. Тогда, применяя теорему 34.1, можно записать $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}7 \cdot 0{,}03 = 0{,}024$. ■

В ходе решения примера 4 мы получили равенство $p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B)$, где события A_1 и A_2 являются несовместными, а их объединение — достоверное событие. Это равенство с указанными условиями является частным случаем более общего факта: если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются попарно несовместными, а их объединение — достоверное событие, то вероятность события B, которое может произойти только при выполнении одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вычисляется по формуле $p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + \ldots + p(A_n)p_{A_n}(B)$. Это равенство называют **формулой полной вероятности**.

1. Что называют условной вероятностью?
2. Какую диаграмму удобно использовать для иллюстрации задач на вычисление условных вероятностей?
3. Какие два события называют независимыми?
4. Какие два события называют зависимыми?
5. Как найти вероятность пересечения независимых событий?
6. По какой формуле можно найти вероятность пересечения двух зависимых событий?

Упражнения

34.1. Среди учеников вашего класса наугад выбрали одного. Найдите вероятность того, что выбранный ученик имеет оценку «5» по алгебре, если известно, что выбрали мальчика.

34.2. В таблице представлена информация о животных питомника. Из всех животных питомника наугад выбрали одного. Найдите вероятность того, что выбранное животное старше года, если известно, что выбрали собаку.

Возраст	Собаки	Кошки
До года	7	3
От года до двух лет	4	11
Старше двух лет	15	22

34.3. В коробке лежат несколько шаров одного цвета: либо все красные, либо все синие. Вероятность того, что в коробке лежат красные шары, равна $\frac{1}{3}$. Из коробки наугад последовательно берут два шара.

1) Какова вероятность того, что второй вытянутый шар окажется красным?

2) Какова вероятность того, что второй вытянутый шар окажется красным, если первый вытянутый шар также оказался красным?

3) Какова вероятность того, что второй вытянутый шар окажется красным, если первый вытянутый шар оказался синим?

34.4. Монету подбрасывают 5 раз. Найдите вероятность того, что в каждом из последних трёх подбрасываний выпадет герб, если в каждом из первых двух подбрасываний выпало число.

34.5. В коробке лежат ручки синего и красного цвета. Из коробки наугад последовательно вытягивают две ручки. Составьте дендрограмму этого испытания.

34.6. Человек ожидает на остановке автобус или троллейбус и заходит в тот вид транспорта, который придёт первым. Находясь в транспорте, человек садится на сиденье возле окна, если есть такое свободное место. Составьте дендрограмму этого испытания.

34.7. Известно, что $p(A) = 0{,}2$, $p(B) = 0{,}6$ и $p(A \cup B) = 0{,}7$. Найдите:
1) $p(A \cap B)$; 2) $p_A(B)$; 3) $p_B(A)$.

34.8. Известно, что $p_A(B) = 0{,}4$, $p_B(A) = 0{,}7$ и $p(A \cap B) = 0{,}2$. Найдите:
1) $p(A)$; 2) $p(B)$; 3) $p(A \cup B)$.

34.9. На собрании присутствуют 16 человек, из которых 11 женщин и 5 мужчин. Для подсчёта результатов голосования предлагается выбрать счётную комиссию из трёх человек. Членов счётной комиссии выбирают последовательно путём жребия. Известно, что первыми двумя членами комиссии оказались мужчины. Найдите вероятность того, что третьим из выбранных членов счётной комиссии окажется женщина. Составьте дендрограмму этого опыта.

34.10. Из коробки, в которой лежат 15 синих и 10 красных шаров, наугад берут сначала один, а потом ещё один шар. Известно, что первый шар был синим. Вычислите вероятность того, что второй шар окажется красным. Составьте дендрограмму этого опыта.

34.11. После путешествия в Европу у путешественника остались фотографии — 9 пейзажей и 16 портретов из Франции и 5 пейзажей и 12 портретов из Италии. Путешественник выбирает наугад 2 фотографии. Какова вероятность того, что они обе будут пейзажами, если известно, что он не выбрал ни одного портрета из Франции?

34.12. В букинистическом магазине на полке с детективами стоят 25 книг, из которых 5 в твёрдой и 20 в мягкой обложке, а на полке со сборниками поэзии — 30 книг, из которых 12 в твёрдой и 18 в мягкой обложке. Посетитель магазина берёт наугад одну книгу с этих полок. Какова вероятность того, что это будет сборник поэзии, если известно, что выбранная книга не является детективом в мягкой обложке?

34.13. При обстреле смеси изотопов урана пучком нейтронов вероятность начала управляемой ядерной цепной реакции составляет 30 %. Какова вероятность того, что из двух таких независимых опытов только во втором начнётся управляемая ядерная цепная реакция?

34.14. Согласно демографическим исследованиям вероятность того, что новорождённый ребёнок окажется мальчиком, равна 0,512. Найдите вероятность того, что в семье, планирующей иметь троих детей, дети родятся в последовательности: мальчик, девочка, мальчик.

◆ ◆ ◆

34.15. На проспекте установлено два светофора. Вероятность зафиксировать зелёный свет на первом светофоре равна 0,7, а на втором светофоре — 0,9. Вероятность зафиксировать зелёный свет одновременно на обоих светофорах равна 0,6. Найдите вероятность:

1) зафиксировать зелёный свет на первом светофоре при условии, что на втором светофоре также горит зелёный свет;

2) зафиксировать зелёный свет на втором светофоре при условии, что на первом светофоре также горит зелёный свет;

3) зафиксировать сигнал, запрещающий движение на первом светофоре, при условии, что на втором светофоре горит зелёный свет;

4) зафиксировать зелёный свет на втором светофоре при условии, что на первом светофоре горит сигнал, запрещающий движение.

34.16. Пиццерия предлагает по желанию посетителя добавлять в пиццу бекон и/или грибы. Вероятность того, что посетитель попросит добавить бекон, равна 0,5, а грибы — 0,75. Вероятность же того, что посетитель попросит добавить в пиццу бекон или грибы, равна 0,8. Найдите вероятность того, что:

1) посетитель попросит добавить бекон, если известно, что он уже попросил добавить грибы;

2) посетитель попросит добавить грибы, если известно, что он не любит бекон.

34.17. В коробке лежат 28 синих и 12 красных ручек. Ученик выбирает наугад ручку из коробки и этой ручкой пишет число на бумаге. Сканер распознаёт число, написанное синей ручкой, с вероятностью 90 %, а число, написанное красной ручкой, с вероятностью 80 %. Найдите вероятность того, что написанное число будет распознано.

34.18. На соревнованиях по метанию копья последнему спортсмену осталось выполнить последнюю попытку. Если во время броска ветер будет попутным, то спортсмен сможет победить с вероятностью 0,4, если же ветер будет встречный — то с вероятностью 0,3. Найдите вероятность победы спортсмена, если вероятность метнуть копьё при попутном ветре равна 0,6, а при встречном — 0,4.

34.19. Пусть A и B — независимые события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли события A и B быть несовместными?

34.20. Пусть A и B — несовместные события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли события A и B быть независимыми?

34.21. Андрей попадает в мишень с вероятностью 0,7, Сергей — 0,4, а Пётр — 0,2. Все трое делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что:

1) попадут все юноши;
2) ни один из юношей не попадёт;
3) только Андрей попадёт;
4) ровно один из юношей попадёт;
5) не попадёт только Петр;
6) только один из юношей не попадёт;
7) по крайней мере двое юношей попадут?

34.22. Среди лотерейных билетов 20 % выигрышных. Игрок приобрёл 3 билета. Какова вероятность того, что среди купленных билетов:

1) не будет выигрышных;
2) будет ровно один выигрышный;
3) будет ровно два выигрышных;
4) будут все выигрышные?

34.23. Вероятность того, что футбольный матч между командами A и B завершится вничью, составляет 40 %. Вероятность победы команды A равна 10 %, а команды B —50 %. Команды A и B планируют провести серию из четырёх поединков между собой. Какова вероятность того, что:

1) все игры закончатся вничью;
2) команда B не проиграет ни одного матча;
3) команда A победит только во второй игре;
4) команда A победит только один раз в серии?

Упражнения для повторения

34.24. Упростите выражение $\sqrt{\frac{x+4}{4}+\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x+4}{4}-\sqrt{x}}$.

34.25. При каких значениях параметра a число $\frac{1}{4}$ является корнем уравнения $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

§ 35 Геометрическая вероятность

«Морской бой» — игра, знакомая почти каждому школьнику. В какой корабль больше шансов попасть — в двухпалубный или четырёхпалубный? Конечно, в четырёхпалубный, ведь он состоит из большего количества клеточек. То же самое можно сказать иначе: поскольку «площадь» четырёхпалубного корабля больше «площади» двухпалубного, то вероятность попасть в четырёхпалубный корабль больше, чем вероятность попасть в двухпалубный.

Задачи, в которых вероятность случайного события можно найти, вычислив некоторые геометрические величины, нередки. Приведём ещё один пример.

Вспомним, что когда первые капли дождя падают на летнюю баскетбольную площадку (рис. 35.1), то оставляют на ней точки-отметки. Какова вероятность того, что очередная точка появится в центральном круге площадки (событие A)? Естественно считать, что вероятность случайного события A будет равной отношению площади центрального круга к площади всей площадки. Например, если площадка имеет размеры 26×14 м, а радиус центрального круга равен 1,8 м, то

$$p(A) = \frac{\pi 1{,}8^2}{26 \cdot 14} \approx 0{,}03.$$

Обобщим наши рассуждения.

Рассмотрим такое испытание. В плоской фигуре U с ненулевой площадью S наугад выбирают точку X. Какова вероятность того, что точка X попадёт в данную фигуру $A \subset U$ с площадью S_A (рис. 35.2)? Обычно счи-

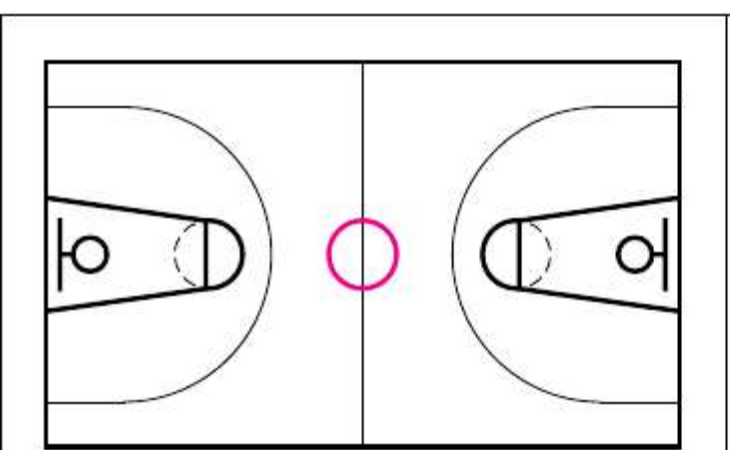


Рис. 35.1

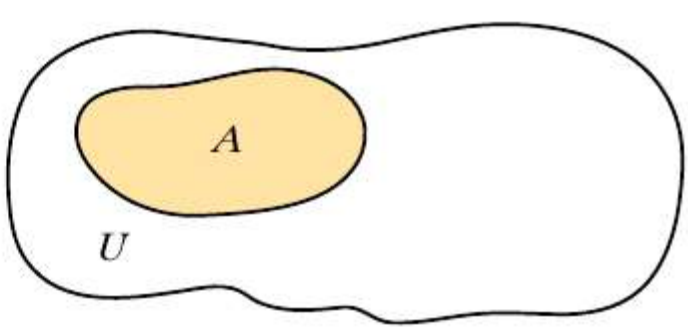


Рис. 35.2

тают, что такая вероятность будет равной отношению площади S_A фигуры A к площади S фигуры U, т. е.

$$p(A) = \frac{S_A}{S}$$

Заметим, что для опытов с выбором точки на прямой или в пространстве можно записать аналогичные отношения. Например, пусть точку X выбирают наугад на промежутке U длиной l (рис. 35.3). Если промежуток A длиной l_A принадлежит промежутку U, то вероятность того, что точка X попадёт в промежуток A, можно вычислить по формуле

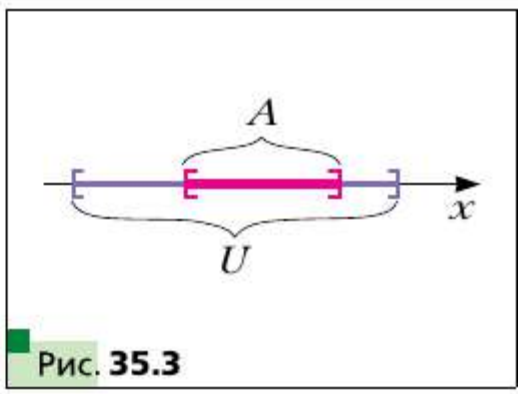


Рис. **35.3**

$$p(A) = \frac{l_A}{l}$$

В опыте с выбором точки из тела U объёма V используют формулу

$$p(A) = \frac{V_A}{V}$$

где V_A — объём тела A, являющегося частью тела U.

Такой способ вычисления вероятностей случайных событий называют **геометрическим определением вероятностей.**

Пример 1. В прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12 наугад бросают точку. Какова вероятность того, что точка попадёт в круг, вписанный в этот треугольник?

Решение. Площадь треугольника равна $S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Используя формулу $r = \frac{S}{p}$, вычислим радиус вписанного круга. Имеем $r = 2$. Тогда площадь вписанного круга равна 4π.

Следовательно, вероятность того, что наугад выбранная точка попадёт во вписанный круг, составляет $\frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15}$. ■

Пример 2. Юноша и девушка договорились о свидании с 15:00 до 16:00. Известно, что каждый из них приходит в любое время с 15:00 до 16:00 независимо от другого. Если юноша придёт и не встретит девушку,

то он будет ждать её ещё 20 мин. Девушка в аналогичной ситуации будет ждать юношу только 10 мин. Какова вероятность того, что свидание состоится?

Решение. Пусть x и y — время (в минутах) прихода на свидание юноши и время прихода девушки соответственно, отсчитанные от 15:00. Например, если юноша пришёл в 15:20, то $x = 20$ мин. Описать независимый и случайный выбор переменных $x \in [0; 60]$ и $y \in [0; 60]$ можно так. Выберем наугад в квадрате $OKLM$ точку $Q(x; y)$ (рис. 35.4). Тогда координаты x и y точки Q определяют время прихода юноши и девушки соответственно.

Выясним, при каких условиях состоится свидание.

Если юноша пришёл раньше девушки, т. е. $x < y$, то свидание произойдёт при условии, что девушка придёт не позднее чем через 20 мин, т. е. время y должно удовлетворять условию $y \leqslant x + 20$.

Если юноша пришёл не раньше девушки, т. е. $x \leqslant y$, то свидание произойдёт при условии, что юноша придёт не позднее чем через 10 мин после девушки, т. е. время x должно удовлетворять условию $x \leqslant y + 10$.

Таким образом, свидание состоится тогда, когда числа x и y будут удовлетворять совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x < y \leqslant x + 20, \\ y \leqslant x \leqslant y + 10. \end{array}\right.$$

Построив график этой совокупности при $x \in [0; 60]$ и $y \in [0; 60]$ (рис. 35.5), получим фигуру A.

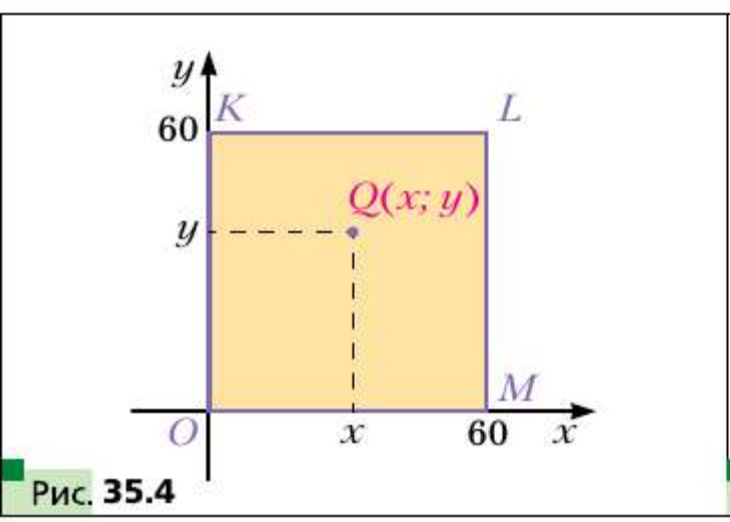


Рис. 35.4

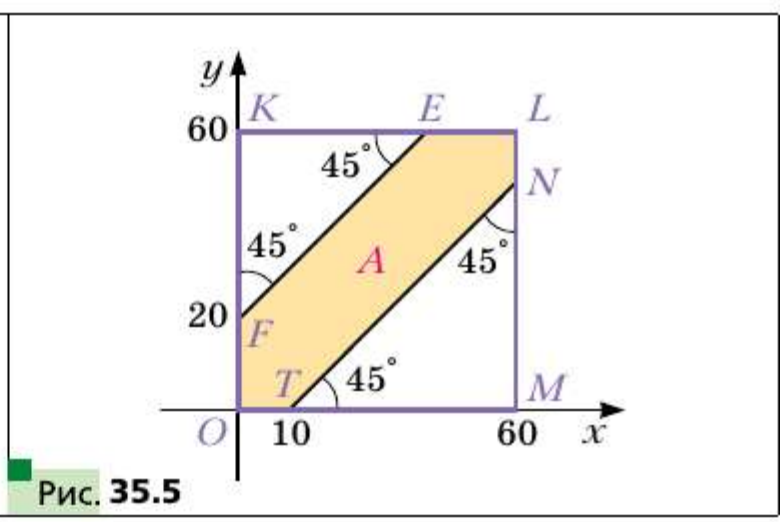


Рис. 35.5

Следовательно, юноша и девушка встретятся тогда и только тогда, когда наугад выбранная в квадрате $OKLM$ точка попадёт в фигуру A. Для нахождения площади S_A фигуры A вычислим площадь квадрата $OKLM$ и площади треугольников KEF и MTN. Имеем:

$$S_{OKLM} = 60^2 = 3600, \quad S_{KEF} = \frac{1}{2}40^2 = 800, \quad S_{MTN} = \frac{1}{2}50^2 = 1250.$$

Отсюда $S_A = 3600 - 800 - 1250 = 1550$.

Используя геометрическое определение вероятностей, получаем $p(A) = \frac{1550}{3600} = \frac{31}{72}$. ■

? Какой способ называют геометрическим определением вероятностей?

Упражнения

35.1. На отрезке $[-2; 2]$ наугад выбирают число x. Какова вероятность того, что $|x| < 1$?

35.2. В куб поместили другой куб со стороной, в два раза меньшей стороны данного куба. Какова вероятность того, что наугад выбранная в большем кубе точка попадёт в меньший куб?

35.3. В круг радиуса 1 вписали квадрат. Какова вероятность того, что наугад выбранная точка круга не попадёт в этот вписанный квадрат?

35.4. В квадрате со стороной 3 наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что расстояние от выбранной точки до ближайшей стороны квадрата не превышает 1?

35.5. На окружности с центром в точке O отметили точки A и B так, что прямая AB не содержит точку O. На этой же окружности случайным образом выбирается точка C. Найдите вероятность того, что хорда BC пересекает диаметр, проходящий через точку A.

35.6. В прямоугольнике со сторонами 5 и 7 наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что расстояние от выбранной точки до всех сторон прямоугольника окажется меньше 4?

35.7. В квадрате с вершинами в точках с координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) наугад выбирают точку $Q\,(x; y)$. Для случайных событий $A = \{(x; y) \mid x < 0{,}4\}$ и $B = \{(x; y) \mid y > 0{,}7\}$ докажите равенство $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

35.8. В квадрате с вершинами в точках с координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) наугад выбирают точку $Q\,(x; y)$. Для случайных событий $A = \{(x; y) \mid x \geqslant 0{,}5\}$ и $B = \{(x; y) \mid y < 0{,}3\}$ докажите равенство $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

35.9. В квадрате с вершинами в точках с координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) наугад выбирают точку $Q\,(x; y)$. Найдите вероятность случайного события:

1) $\{(x; y) \mid x < 0{,}3\}$;

2) $\{(x; y) \mid x + y > 0{,}2\}$;

3) $\{(x; y) \mid \max\{x, y\} \geqslant 0{,}7\}$.

35.10. В квадрате с вершинами в точках с координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) наугад выбирают точку $Q\,(x;\ y)$. Найдите вероятность случайного события:

1) $\{(x;\ y)\mid y \geqslant 0{,}8\}$;

2) $\{(x;\ y)\mid x - y < 0{,}3\}$;

3) $\{(x;\ y)\mid \min\{x,\ y\} \leqslant 0{,}4\}$.

35.11. На плоскости провели бесконечное количество параллельных прямых. Расстояние между соседними прямыми равно 5. Какова вероятность того, что монета радиуса 1, которую случайным образом бросают на плоскость, пересечёт одну из параллельных прямых?

35.12. На координатную плоскость случайным образом бросают монету радиуса $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что она пересечёт одну из прямых вида $y = k$ или $x = k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$?

35.13. Андрей и Кирилл договорились о встрече в 12:00. Каждый из них приходит на место встречи в любое время от 11:50 до 12:10 независимо от другого. Друзья договорились ждать друг друга 10 мин. Какова вероятность того, что встреча состоится?

35.14. Поезда метро ходят каждые 3 мин. Посадка пассажиров длится 20 с. Какова вероятность того, что пассажир после прихода на станцию в течение 1 мин сядет в вагон метро?

Упражнения для повторения

35.15. При каких значениях параметра b имеет единственный корень уравнение $bx^2 + x + b = 0$.

35.16. Найдите все пары натуральных чисел $(m;\ n)$ таких, что $m! + 12 = n^2$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Метод Монте-Карло

Геометрическую вероятность используют в разделах математической науки, которые на первый взгляд не имеют никакого отношения к теории вероятностей. Покажем, например, как с помощью геометрической вероятности приближённо вычисляют площади сложных фигур.

Рассмотрим фигуру A, заданную на координатной плоскости xy, например, неравенством $(x + \sqrt{y - y^2})2^{y\sqrt{x - x^2}} \leqslant 1$ (рис. 35.6). Построить график (даже приблизительный) такого неравенства — трудная задача[1]. Непонятно также, как известными методами вычислить площадь фигуры A.

Воспользуемся формулой геометрической вероятности $p(A) = \dfrac{S_A}{S}$, откуда $S_A = Sp(A)$. Следовательно, для вычисления площади фигуры A необходимо знать площадь S фигуры U, которой принадлежит фигура A, и вероятность попадания точки в фигуру A при случайном выборе точки в фигуре U.

Поскольку область определения данного неравенства задаётся условиями $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то все точки фигуры A принадлежат единичному квадрату $OKLM$ (рис. 35.7). Поэтому в качестве фигуры U возьмём единичный квадрат $OKLM$ с площадью $S = 1$.

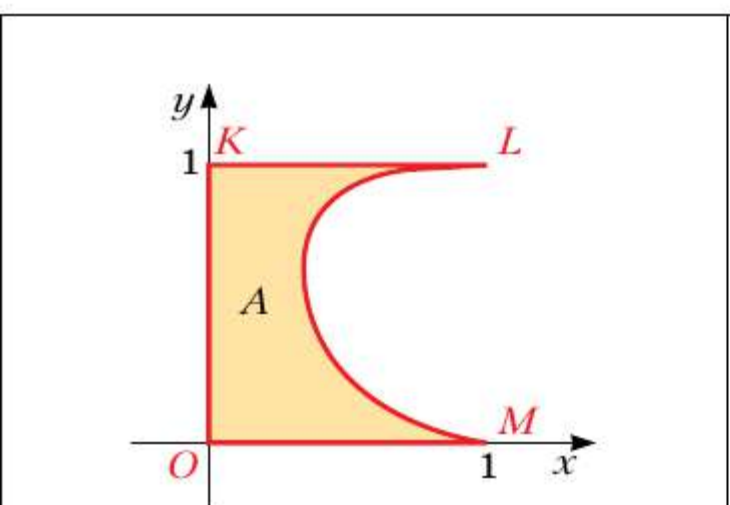


Рис. 35.6

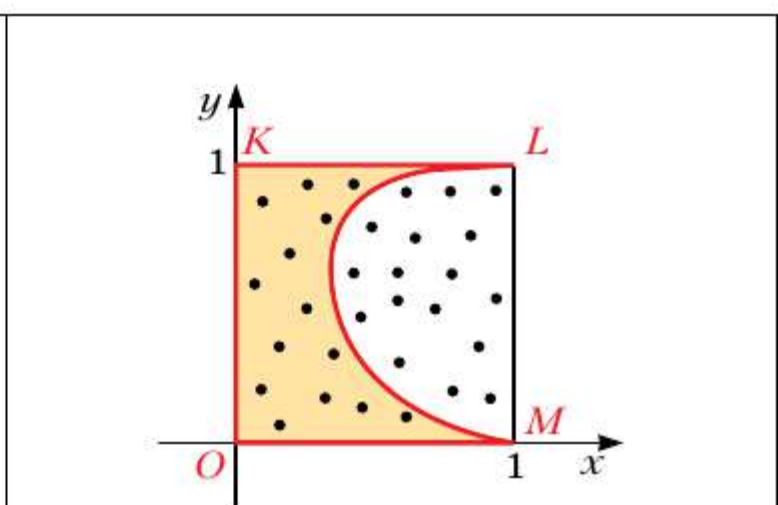


Рис. 35.7

Величину $p(A)$ можно приближённо оценить, вычислив частоту попадания точки в фигуру A. Для этого надо N раз наугад выбрать точку $Q\,(x; y)$ с координатами $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ и подсчитать количество тех случаев, когда будет выполняться данное неравенство (см. рис. 35.7). Обычно такие испытания моделируют с помощью компьютера. Используя стандартный генератор случайных чисел, на компьютере легко реализовать случайный выбор чисел $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$. Кроме того, таким способом необходимое большое количество испытаний можно провести за считаные секунды.

[1] График данного неравенства, изображённый на рисунке 35.6, построен с помощью компьютера.

Проведя $N = 10^6$ таких испытаний, авторы учебника выяснили, что в $N_A = 457\ 134$ случаях выбранная наугад точка попала в фигуру A. Следовательно, $p(A) \approx \frac{457\,134}{10^6} \approx 0{,}457$. Воспользовавшись формулой $S_A = p(A)S$, имеем: $S_A \approx 0{,}457$.

Такой метод приближённого вычисления площади называют **методом Монте-Карло**.

Название метода Монте-Карло происходит от названия города княжества Монако. Город Монте-Карло знаменит многочисленными казино, а одним из простейших механических устройств для получения случайных чисел является игровая рулетка.

§ 36 Схема Бернулли

В теории вероятностей разные на вид задачи могут быть решены одним и тем же способом. В таких случаях говорят, что эти задачи описывает одна и та же **вероятностная модель**. Одна из самых важных вероятностных моделей получила название «схема Бернулли».

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Вероятность попадания мяча в корзину при штрафном броске у баскетболиста равна p. Баскетболист проводит серию из трёх штрафных бросков (каждый из бросков выполняется независимо от результатов других). Какова вероятность того, что баскетболист попадёт в корзину только:

1) при первом и втором бросках;

2) при втором и третьем бросках;

3) два раза из трёх бросков?

Решение. 1) Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что баскетболист попадёт в корзину соответственно при первом, втором или третьем броске.

Тогда

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p,$$
$$p(\overline{A_1}) = p(\overline{A_2}) = p(\overline{A_3}) = 1 - p.$$

Баскетболист попадёт в корзину только при первом и втором бросках тогда и только тогда, когда произойдут и событие A_1, и событие A_2, а также не произойдёт событие A_3. Поэтому, если обозначить через X событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при первом и втором бросках, то $X = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$. Поскольку каждый из бро-

сков выполняется независимо от результатов других бросков, то можно записать:

$$p(X) = p(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = p(A_1)p(A_2)p(\overline{A_3}) = p^2(1-p).$$

Приведём менее формальный вариант только что изложенного решения.

Событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при первом и втором бросках, закодируем так: «+ + –». По условию задачи вероятность забросить мяч в корзину (вероятность «плюса») равна p, а вероятность промаха (вероятность «минуса») равна $1 - p$. Поскольку броски выполняются независимо, то вероятность события «+ + –» можно найти как произведение вероятностей: $p \cdot p \cdot (1-p) = p^2(1-p)$.

2) Закодируем событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при втором и третьем бросках, так: «– + +». Рассуждая точно так же, как в пункте 1, получим, что вероятность этого события равна $(1-p) \cdot p \cdot p = p^2(1-p)$.

3) Баскетболист попадёт в корзину два раза из трёх бросков, если произойдёт одно из следующих трёх событий: «+ + –», или «+ – +», или «– + +». Поскольку вероятность каждого из этих событий равна $p^2(1-p)$ и эти события несовместны, то вероятность того, что баскетболист попадёт ровно два раза из трёх бросков, равна $3p^2(1-p)$. ■

Обобщим задачу примера 1.

В некотором испытании (например, при броске мяча в кольцо) с двумя возможными исходами «У» (успех) и «Н» (неудача) вероятность исхода «У» равна p. Пусть это испытание повторяют n раз и каждое испытание выполняется независимо от результатов других испытаний. Такую серию испытаний называют **схемой Бернулли с параметрами *n* и *p***.

Перейдём к более подробному изучению схемы Бернулли. Найдём вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p из n проведённых испытаний ровно m завершатся исходом «У» (успех), а остальные $n - m$ испытаний завершатся исходом «Н» (неудача).

Будем рассуждать аналогично решению примера 1. Сначала найдём вероятность того, что первые m испытаний закончатся исходом «У», а оставшиеся $n - m$ испытаний — исходом «Н». Это событие закодируем так: «$\underbrace{\text{У У ... У}}_{m \text{ букв}}\ \underbrace{\text{Н Н ... Н}}_{(n-m) \text{ букв}}$». Поскольку испытания выполняются независимо, то вероятность события «$\underbrace{\text{У У ... У}}_{m \text{ букв}}\ \underbrace{\text{Н Н ... Н}}_{(n-m) \text{ букв}}$» равна

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m \text{ множителей}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{(n-m) \text{ множителей}} = p^m(1-p)^{n-m}.$$

Любое другое событие, в котором m испытаний закончатся исходом «У», а $n - m$ испытаний — исходом «Н», также можно закодировать набором букв, составленным из m букв «У» и $n - m$ букв «Н». Поэтому его вероятность также равна $p^m(1-p)^{n-m}$. Следовательно, вероятность того, что из n проведённых испытаний ровно m завершатся исходом «У», равна:

$$k \cdot p^m(1-p)^{n-m},$$

где k — количество событий, закодированных с помощью m букв «У» и $n - m$ букв «Н».

Осталось найти число k. Поскольку число k равно числу способов расставить m букв «У» в последовательности из n букв, то $k = C_n^m$.

Таким образом, ***вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p ровно m испытаний завершатся успешным исходом, равна***

$$\boxed{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}} \qquad (1)$$

Например, в схеме Бернулли с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{1}{3}$ вероятность двух успешных исходов, т. е. когда $m = 2$, будет равна $C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-2} = \frac{80}{243}$.

Обратите внимание на то, что выражение $C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ напоминает слагаемое формулы бинома Ньютона. Это не случайно. Если обозначить $q = 1 - p$ и записать формулу бинома Ньютона для выражения $(q + p)^n$, то получим

$$\boxed{(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1}p + C_n^2 q^{n-2}p^2 + \ldots + p^n.} \qquad (2)$$

В правой части записанного равенства $(m + 1)$-е слагаемое имеет вид $C_n^m q^{n-m}p^m = C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ и совпадает с выражением (1).

Отметим также, что формула (2) имеет вероятностную интерпретацию. С одной стороны, поскольку $q = 1 - p$, то выражение в левой части равно единице. С другой стороны, слагаемые в правой части равны вероятностям того, что в схеме Бернулли ровно m испытаний завершатся успешным исходом. Так первое слагаемое соответствует значению $m = 0$, второе слагаемое — значению $m = 1$ и т. д., последнее слагаемое — значению $m = n$. Поскольку значение m при всех возможных результатах опыта будет равно одному из целых чисел от 0 до n, то сум-

ма в правой части равенства (2) задаёт вероятность достоверного события.

Пример 2. Фермерское хозяйство по производству овощей поставляет картофель в торговую сеть. Вероятность того, что наугад выбранная картофелина удовлетворяет требованиям торговой сети по массе и форме, равна 80 %. Найти вероятность того, что из 20 наугад выбранных картофелин 16 удовлетворят требованиям торговой сети.

Решение. Условие задачи можно описать схемой Бернулли.

Действительно, при случайном выборе картофелины возможны два исхода:

«У» — выбранная картофелина удовлетворяет требованиям торговой сети (успешный исход);

«Н» — выбранная картофелина не удовлетворяет требованиям торговой сети (неуспешный исход).

Вероятность исхода «У» по условию задачи равна $p = 0{,}8$. Данное испытание повторяют 20 раз, т. е. $n = 20$, при этом необходимо выяснить вероятность того, что из этих 20 испытаний 16 завершатся исходом «У», т. е. $m = 16$.

Используя формулу (1), получаем, что искомая вероятность равна

$$C_{20}^{16} \cdot 0{,}8^{16} \cdot 0{,}2^4 \approx 0{,}22. \blacksquare$$

Пример 3. В некотором испытании случайное событие A происходит с вероятностью p. Испытание повторяют 10 раз (каждое из 10 испытаний проходит независимо от результатов остальных испытаний). Какова вероятность того, что в этих 10 испытаниях событие A произойдёт не менее двух раз?

Решение. Пусть X — событие, состоящее в том, что A произойдёт не меньше двух раз. Тогда $\bar{X}$ — событие, состоящее в том, что A или произойдёт один раз, или вообще не произойдёт ни разу.

Вероятность того, что событие A произойдёт один раз, равна $C_{10}^1 p(1-p)^9 = 10p(1-p)^9$.

Вероятность того, что событие A не произойдёт ни разу, равна $C_{10}^0 p^0 (1-p)^{10} = (1-p)^{10}$.

События, вероятности которых мы нашли, являются несовместными. Поэтому

$$p(\bar{X}) = 10p(1-p)^9 + (1-p)^{10} = (1-p)^9(1+9p).$$

Таким образом, $p(X) = 1 - (1-p)^9(1+9p)$.

Ответ: $1 - (1-p)^9(1+9p)$. $\blacksquare$

1. Что называют схемой Бернулли?
2. По какой формуле можно найти вероятность количества успешных исходов в схеме Бернулли?

Упражнения

36.1. Найдите вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p число успешных исходов равно m, если:

1) $n = 8$, $p = 0{,}2$, $m = 2$;

2) $n = 5$, $p = \frac{1}{4}$, $m = 5$;

3) $n = 4$, $p = 60\ \%$, $m = 3$.

36.2. Найдите вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p число успешных исходов равно m, если:

1) $n = 6$, $p = \frac{1}{2}$, $m = 3$;

2) $n = 3$, $p = 0{,}4$, $m = 0$;

3) $n = 5$, $p = 70$, $m = 2$.

36.3. Найдите числовые значения вероятностей того, что в схеме Бернулли с параметрами $n = 4$ и $p = 30\ \%$ число успешных исходов равно m при $m = 0$, $m = 1$, $m = 3$, $m = 4$. Сравните полученные значения и сделайте вывод о том, какое количество успешных исходов наиболее вероятно.

36.4. Какое количество успешных исходов наименее вероятно в схеме Бернулли с параметрами $n = 3$ и $p = 75\ \%$?

36.5. Какова вероятность того, что из 5 бросков игрального кубика шестёрка выпадет ровно три раза?

36.6. Монету подбрасывают 7 раз. Какова вероятность того, что ровно 2 раза выпадет герб?

36.7. Стрелок попадает в мишень с вероятностью p. Найдите вероятность того, что из 12 выстрелов стрелок попадёт в мишень ровно пять раз.

36.8. Вероятность того, что станок изготовит бракованную деталь, равна p. Какова вероятность того, что из 25 деталей ровно 3 будут бракованными?

36.9. Тест состоит из 7 вопросов. Вероятность того, что ученик правильно ответит на отдельно взятый вопрос, равна 90 %. Найти вероятность того, что ученик правильно ответит на 5 вопросов.

36.10. В новой квартире вкрутили 6 новых лампочек. Вероятность того, что лампочка проработает не менее года, составляет 0,95. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить ровно 2 лампочки?

36.11. При игре в теннис Андрей в среднем выигрывает у Сергея 2 гейма из 5. Какова вероятность того, что из 7 геймов Андрей выиграет ровно 2 гейма?

36.12. Есть r ящиков, в каждом из которых лежат n чёрных и m белых шаров. Из каждого ящика наугад берут по одному шару. Какова вероятность того, что среди взятых шаров будет ровно k чёрных?

36.13. В r вагонов электрички случайным образом садятся n пассажиров. Какова вероятность того, что в первом вагоне окажется k из этих пассажиров?

36.14. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании выступлений российских школьников на олимпиадах прошлых лет был сделан вывод, что вероятность российского школьника получить золотую медаль на олимпиаде составляет около 61 %. Оцените вероятность того, что на очередной Международной математической олимпиаде команда России завоюет не менее 5 золотых медалей.

36.15. Во время эпидемии гриппа вероятность того, что врач, контактирующий с больными, сам заболеет в течение недели, равна 0,07. Найдите вероятность того, что из 20 лечащих врачей поликлиники в течение недели заболеет не меньше 2 человек.

36.16. Гроссмейстер проводит сеанс одновременной игры в шахматы на 30 досках. Вероятность того, что гроссмейстер выиграет каждую отдельную партию, равна 95 %. Какова вероятность того, что в сеансе гроссмейстер выиграет не менее 28 партий?

Упражнения для повторения

36.17. Решите неравенство:

1) $|x^2 + 3x| < x + 4$;

2) $|x^2 + 3x| \geqslant 2 - x^2$.

36.18. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x+4}{x-1} + \dfrac{x-4}{x+1} = \dfrac{x+8}{x-2} + \dfrac{x-8}{x+2}$;

2) $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x-4}{x+4}$;

3) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} + \dfrac{x^2+8x+20}{x+4} = \dfrac{x^2+4x+6}{x+2} + \dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

§ 37 Случайные величины

В повседневной жизни мы часто встречаемся с величинами, которые меняют свои значения. Их называют переменными величинами. На их значения влияет целый ряд факторов, знание которых позволяет определять поведение переменной величины. Однако изменение многих величин происходит в зависимости от ускользающих от нашего контроля причин. Говорят, что эти величины подвержены случайной изменчивости.

Рассмотрим такие эксперименты.

1. Выясняют количество учащихся в классе на момент начала занятий.
2. Измеряют напряжение в цепи переменного тока.
3. Фиксируют количество посетителей музея за один день.
4. Определяют дневную выручку в школьной столовой.
5. Подбрасывая игральный кубик, фиксируют выпавшее количество очков.

Результатом каждого из этих экспериментов является некоторое число, которое не может быть раз и навсегда определено, а меняется под влиянием случайных воздействий. В таких случаях говорят, что в данном испытании рассматривается **случайная величина** (количество учащихся, величина напряжения в цепи, количество посетителей и т. д.).

Таким образом, **случайной величиной называют величину, значения которой определяются результатами испытания с числовыми исходами**. Значение случайной величины зависит от результата эксперимента. Поэтому при изучении случайной величины на помощь приходят вероятностные оценки.

Случайные величины будем обозначать латинскими буквами x, y, ... Например, говорят: «случайная величина x равна количеству очков, выпавших при подбрасывании игрального кубика».

Все те значения, которые может принимать случайная величина, образуют **множество значений случайной величины**.

Пример 1. Случайная величина x равна количеству гербов, выпавших при подбрасывании двух монет. Найдите множество значений случайной величины x.

Решение. Поскольку в результате подбрасывания двух монет может выпасть или 0, или 1, или 2 герба, то множество $\{0, 1, 2\}$ является множеством значений случайной величины x. ■

Обратим внимание, что существуют случайные величины с бесконечным множеством значений. Например, если случайная величина y

равна расстоянию от центра круга радиуса R до точки этого круга, выбранной случайным образом, то множеством значений случайной величины y будет промежуток $[0; R]$.

Далее мы ограничимся изучением случайных величин с конечным или счётным множеством значений. Такие случайные величины относят к так называемым **дискретным случайным величинам**.

Для того чтобы делать выводы об испытании в целом, одного множества значений случайной величины недостаточно. Важно установить, с какой вероятностью случайная величина принимает то или иное значение.

Обратимся ещё раз к опыту из примера 1. Если пронумеровать монеты, то данное испытание заканчивается одним из четырёх равновозможных результатов:

ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ,

где буквой Г обозначено выпадение на монете герба, а буквой Ч — числа.

Вероятность того, что при подбрасывании двух монет выпадет два герба, равна $\frac{1}{4}$. Случайная величина x равна количеству гербов, выпавших при подбрасывании двух монет. Поэтому можно утверждать, что случайная величина x принимает значение, равное двум, с вероятностью $\frac{1}{4}$. Этот факт принято записывать так: $p(x = 2) = \frac{1}{4}$. Рассуждая аналогично, получаем: $p(x = 0) = \frac{1}{4}$, $p(x = 1) = \frac{2}{4}$.

Набор вероятностей $p(x = 0) = \frac{1}{4}$, $p(x = 1) = \frac{2}{4}$, $p(x = 2) = \frac{1}{4}$ называют **распределением вероятностей случайной величины** x. Распределение вероятностей случайной величины часто представляют в виде таблицы:

Значение x	0	1	2
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Отметим, что *сумма чисел, записанных во второй строке таблицы распределения вероятностей случайной величины, всегда равна* 1. Это следует из того, что случайная величина гарантированно принимает одно из значений, указанных в первой строке таблицы.

Следующая таблица — это распределение случайной величины y, равной количеству выпавших очков при подбрасывании игрального кубика.

Значение y	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Видим, что во второй строке таблицы все значения вероятностей равны. Такое распределение называют **равномерным распределением случайной величины.**

Распределения вероятностей случайной величины можно проиллюстрировать с помощью диаграмм различных видов. Например, распределение вероятностей описанной выше случайной величины x можно представить в виде столбчатой диаграммы (гистограммы) и в виде круговой диаграммы (рис. 37.1).

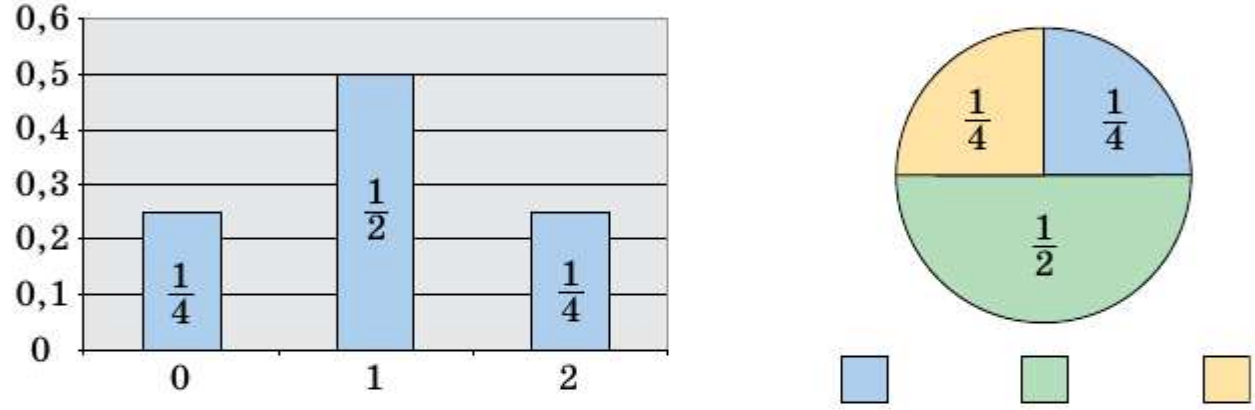


Рис. **37.1**

Пример 2. Распределение вероятностей случайной величины z задано таблицей, в которой пропущено одно значение

Значение z	1	3	7	8	10
Вероятность	0,1	0,35	0,25		0,15

Найдите вероятности:

1) $p\,(z = 4)$;

2) $p\,(z < 6)$;

3) $p\,(9 \leqslant z < 12)$;

4) $p\,(z = 8)$.

Решение. 1) Запись $p\,(z = 4)$ означает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина z равна 4. Поскольку в первой стро-

ке таблицы распределения вероятностей отсутствует число 4, то это означает, что случайная величина z при любом исходе испытания не может оказаться равной 4. Поэтому $p(z = 4) = 0$.

2) Случайная величина z принимает значение, меньшее 6, только тогда, когда $z = 1$ или $z = 3$. Поскольку события «случайная величина принимает значение 1» и «случайная величина принимает значение 3» являются несовместными, то

$$p(z < 6) = p(z = 1) + p(z = 3) = 0{,}1 + 0{,}35 = 0{,}45.$$

3) Имеем:

$$p(9 \leqslant z < 12) = p(z = 10) = 0{,}15.$$

4) Поскольку сумма чисел, записанных во второй строке таблицы, равна 1, то

$$p(z = 8) = 1 - (0{,}1 + 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}15) = 0{,}15. \blacksquare$$

Пример 3. Случайная величина x равна количеству успешных испытаний в схеме Бернулли с параметрами n и p. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

Решение. Множество значений случайной величины x равно $\{0, 1, 2, ..., n\}$. В предыдущем параграфе для определения вероятности того, что искомая случайная величина x принимает значение m, была получена формула $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, т. е. $p(x = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$. Последовательно подставляя в эту формулу значения m, равные 0, 1, 2, ..., n, составим таблицу распределения вероятностей случайной величины x:

Значение x	0	1	2	...	n
Вероятность	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$	...	p^n

$\blacksquare$

Напомним, что каждое из выражений $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ является одним из слагаемых разложения выражения $(p+q)^n$, где $q = 1 - p$, по формуле бинома Ньютона. Учитывая это, распределение вероятностей количества успешных испытаний в схеме Бернулли называют **биномиальным распределением**.

Если в биномиальном распределении положить $n = 1$, то случайная величина будет принимать только два значения 1 или 0 соответственно с вероятностями p и $q = 1 - p$. Такое распределение случайной величины называют **распределением Бернулли**.

Нередко на практике эксперимент или наблюдение проводят до первого успеха (наступление событие A), причём вероятность появления события A в каждом опыте одна и та же и не зависит от результата

предыдущего опыта. Например, игральную кость подбрасывают до первого появления числа 6; стреляют в мишень до первого попадания и т. п.

Рассмотрим случайную величину x, множество значений которой определяется количеством проведённых попыток. Например, если событие A наступило с первой попытки, то $x = 1$, если со второй попытки, то $x = 2$, и т. д.

Пусть вероятность наступления события A равна p, где $0 < p < 1$, и первые $k - 1$ попытки были неудачными, а k-я попытка привела к успеху. Тогда распределение случайной величины x определяется формулой $p(x = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Соответствующая таблица распределения имеет следующий вид:

Значение x	1	2	3	...	k	...
Вероятность	p	$p(1 - p)$	$p\ (1 - p)^2$	...	$p(1 - p)^{k-1}$	...

Значения вероятностей являются последовательными членами геометрической прогрессии. Поэтому говорят, что рассмотренная случайная величина имеет **геометрическое распределение.**

Во второй строке таблицы записана бесконечная геометрическая прогрессия с первым членом p и знаменателем $1 - p$, причём $0 < 1 - p < 1$. Сумма этой прогрессии равна 1. Действительно, $S = \dfrac{p}{1 - (1 - p)} = 1$.

Уточним понятие случайной величины, множество значений которой конечно.

Пусть в результате некоторого опыта могут произойти n элементарных исходов A_1, A_2, ..., A_n, имеющие соответственно вероятности p_1, p_2, ..., p_n, где $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Каждому событию A_i поставим в соответствие некоторое число x_i, где $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Заданную таким образом числовую функцию называют **случайной величиной.**

При таком определении на случайные величины распространяются все правила действий с ранее изученными функциями: их можно складывать, вычитать, умножать и т. д.

Рассмотрим опыт, состоящий в том, что одновременно подбрасывают два игральных кубика. Пусть x и y — случайные величины, равные количеству очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно. Интуитивно понятно, что значения величины x не зависят от того, какие значения принимает величина y, и наоборот. Мы привели пример **независимых случайных величин.** Разъясним это понятие более подробно.

Легко убедиться в том, что, например, $p(x = 2) = \frac{1}{6}$, $p(y = 3) = \frac{1}{6}$ и $p(x = 2 \text{ и } y = 3) = \frac{1}{36}$. Видим, что $p(x = 2) \cdot p(y = 3) = p(x = 2 \text{ и } y = 3)$. Аналогичное равенство будет выполняться для любых a и b из множеств значений случайных величин x и y соответственно, т. е. $p(x = a) \cdot p(y = b) = p(x = a \text{ и } y = b)$. В таких случаях говорят, что случайные величины x и y являются независимыми. Заметим, что в данном опыте случайная величина $z = x + y$, определяемая как сумма значений случайных величин x и y, и, например, случайная величина x не являются независимыми. Убедитесь в этом самостоятельно, установив, что $p(x = 3) \cdot p(z = 3) \neq p(x = 3 \text{ и } z = 3)$.

?

1. Что называют случайной величиной?
2. Что называют множеством значений случайной величины?
3. Что называют распределением вероятностей случайной величины?
4. Какое распределение вероятностей называют биномиальным? Распределением Бернулли? Геометрическим распределением?

Упражнения

37.1. Завуч школы обходит классы и записывает количество учеников, присутствующих на уроке. Какую случайную величину рассматривает завуч в этом испытании?

37.2. В коробке лежат 12 шаров, из которых пять шаров подписаны числом 1, а оставшиеся 7 шаров — числом 2. Из коробки наугад берут один шар и фиксируют число, написанное на этом шаре. Какую случайную величину изучают в этом испытании? Укажите множество значений и составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

37.3. Игральный кубик подбрасывают один раз и записывают число, выпавшее на кубике. Какую случайную величину изучают в этом испытании? Укажите множество значений и составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

37.4. По таблице распределения вероятностей случайной величины x найдите значение переменной a.

1)

Значение x	1	2	3	4	5
Вероятность	0,18	0,18	0,18	0,18	a

2)

Значение x	-1	-2	-3	-4
Вероятность	$3a$	$4a$	$6a$	$7a$

3)

Значение x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Вероятность, %	27	b	32	a	17	$-a$

4)

Значение x	a	$1 - a^2$	7
Вероятность	$5a^2 - 2a$	$3 - 5a$	a^2

37.5. Может ли следующая таблица задавать распределение вероятностей случайной величины x?

Значение x	0	-1	1	-2	2
Вероятность	0,46	0,05	0,18	0,21	0,11

37.6. По таблице распределения вероятностей случайной величины x найдите значение переменной a.

1)

Значение x	0	12	48
Вероятность	0,29	0,51	a

2)

Значение x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Вероятность, %	19	22	a	31	14

3)

Значение x	1	2	3	4
Вероятность	a	$4a$	$9a$	$16a$

37.7. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины x.

Значение x	0	2	4	7	10	16
Вероятность, %	10	24	31	14	9	12

Найдите:
1) $p(x = 4)$;
2) $p(x = 1)$;
3) $p(x \geqslant 7)$;
4) $p(x < 4)$;
5) $p(2 \leqslant x < 8)$.

37.8. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины x.

Значение y	−3	−2	−1	1	2	3
Вероятность	0,08	0,04	0,32	0,26	0,17	0,13

Найдите:
1) $p(y = 3)$;
2) $p(y \geqslant 0)$;
3) $p(y < 7)$;
4) $p(-1 < y \leqslant 2)$.

◆ ◆

37.9. Игральный кубик бросают два раза и записывают сумму чисел, выпавших на кубике. Какую случайную величину изучают в этом испытании? Составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

37.10. В одной коробке лежат 2 шара, пронумерованных числами 1 и 2, в другой — 3 шара, пронумерованных числами 3, 4 и 5. Из каждой коробки наугад берут по одному шару и записывают сумму чисел на взятых шарах. Какую случайную величину изучают в этом испытании? Составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

37.11. Игральный кубик подбрасывают один раз и записывают количество натуральных делителей числа, выпавшего на кубике. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины, изучаемой в этом испытании.

◆ ◆ ◆

37.12. Монету подбрасывают не больше 6 раз до тех пор, пока первый раз не выпадет герб, и записывают, сколько раз пришлось подбросить монету. Составьте таблицу распределения вероятностей изучаемой случайной величины.

37.13. Игральный кубик бросают не больше 3 раз до тех пор, пока первый раз не выпадет шестёрка, и записывают, сколько раз пришлось под-

бросить кубик. Составьте таблицу распределения вероятностей записанной случайной величины.

Упражнения для повторения

37.14. Известно, что $a > b$. Расположите в порядке убывания числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

37.15. Дано: $a < b$. Сравните:

1) $a - 5$ и b; 2) a и $b + 6$; 3) $a + 3$ и $b - 2$.

§ 38 Характеристики случайной величины. Представление о законе больших чисел

Рассмотрим такой пример. Пусть случайная величина x равна величине месячной прибыли некоторой фирмы. Аналитики прогнозируют такое распределение вероятностей случайной величины x в следующем месяце:

Значение x (тыс. р.)	-500	-40	110
Вероятность	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

Из таблицы видно, что при одних стечениях обстоятельств фирма получит прибыль, при других — убыток. Какую величину прибыли следует ожидать в следующем месяце?

Для ответа на этот вопрос будем рассуждать так. Предположим, что владелец фирмы имеет не одну такую фирму, а десять одинаковых фирм. Вероятность получить убыток в 500 тыс. р. равна $\frac{1}{10}$. Поэтому будем считать, что только одна из десяти рассматриваемых фирм получит убыток в 500 тыс. р. в следующем месяце. Рассуждая аналогично, считаем, что две фирмы получат убыток по 40 тыс. р., а каждая из семи оставшихся — прибыль в 110 тыс. р. Общая прибыль всех десяти фирм вместе будет равна $(-500) \cdot 1 + (-40) \cdot 2 + 110 \cdot 7$ тыс. р., а значит, на каждую из них придётся

$$(-500) \cdot \frac{1}{10} + (-40) \cdot \frac{2}{10} + 110 \cdot \frac{7}{10} = 19 \text{ тыс. р.}$$

Характеристика 19 тыс. р. показывает ожидаемый уровень прибыли каждой такой фирмы в следующем месяце. Эту характеристику назы-

вают **математическим ожиданием** случайной величины x и обозначают $M(x)$. Таким образом, $M(x) = 19$.

Обратите внимание на выражение $(-500) \cdot \frac{1}{10} + (-40) \cdot \frac{2}{10} + 110 \cdot \frac{7}{10}$, с помощью которого было вычислено математическое ожидание $M(x)$. Несложно заметить, что для вычисления $M(x)$ каждое из значений случайной величины x нужно умножить на вероятность наступления этого значения и все полученные произведения сложить.

Определение

Пусть случайная величина x имеет следующее распределение вероятностей:

Значение x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Число $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + ... + x_np_n$ называют математическим ожиданием случайной величины x.

Пример. Страховой полис[1] предполагает выплаты в случае наступления двух страховых случаев. В первом страховом случае размер выплат составит 25 тыс. р., а во втором — 175 тыс. р. По опыту прошлых лет известно, что первый страховой случай наступает с вероятностью 5 %, а второй — с вероятностью 1 %. На продаже каждого такого полиса страховая компания планирует заработать по 2 тыс. р. Определите, какую цену полиса должна назначить страховая компания.

Решение. Рассмотрим случайную величину x, равную размеру выплат страховой компанией по страховому полису. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины x:

Значение x (тыс. р.)	0	25	175
Вероятность	0,94	0,05	0,01

Найдём математическое ожидание случайной величины x. Имеем:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}94 + 25 \cdot 0{,}05 + 175 \cdot 0{,}01 = 3.$$

[1] Документ, по которому страховая компания обязуется выплатить владельцу полиса определённые денежные суммы при наступлении предусмотренных страховых случаев.

Величина $M(x) = 3$ показывает, что ожидаемый размер выплат по каждому полису составит 3 тыс. р. Поскольку страховая компания планирует заработать по 2 тыс. р. на каждом полисе, то она должна установить цену такого полиса в 5 тыс. р.

Ответ: 5 тыс. р. ■

Если множество значений случайной величины содержит много элементов, то вычислить математическое ожидание бывает сложно. Например, вычисление математического ожидания для биномиального распределения на основании одного лишь определения требует выполнения значительной технической работы. Тем не менее интуитивно найти правильный результат достаточно просто.

Например, пусть вероятность забросить мяч в баскетбольную корзину равна 65 %. Сколько попаданий в кольцо следует ожидать при 100 бросках? Естественный ответ 65 попаданий является правильным. Здесь число 65 равно математическому ожиданию в схеме Бернулли с параметрами 100 и 0,65.

Математическое ожидание количества успехов в схеме Бернулли с параметрами n и p равно np. Для доказательства этого факта нужно знать одно важное свойство математического ожидания, которое нередко используется в повседневной жизни.

Пусть x и y случайные величины, равные соответственно месячным прибылям предприятий A и B. Было установлено, что $M(x) = 500$ тыс. р. и $M(y) = 600$ тыс. р. Какую прибыль ожидать в следующем месяце от двух предприятий вместе? Естественно, следует ориентироваться на сумму в 1,1 млн р.

Этот пример иллюстрирует такое свойство математического ожидания: *математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий*. В частности, для двух случайных величин x и y имеем: $M(x + y) = M(x) + M(y)$.

Теперь с помощью этой формулы можно легко найти математическое ожидание количества успехов в схеме Бернулли. Сделайте это самостоятельно.

Также отметим, что математическое ожидание случайной величины, являющейся константой, равно этой константе. Это свойство следует из определения математического ожидания. Убедитесь в этом самостоятельно.

Пусть $M(x)$ — математическое ожидание некоторой случайной величины x. Тогда случайная величина $y = x - M(x)$ выражает отклонение случайной величины x от её математического ожидания. Естественно считать, что величина $M(y)$ должна характеризовать разброс значений

случайной величины x. Однако это не так, поскольку для любой случайной величины x выполняется равенство $M(y) = 0$. Убедимся в этом.

Пусть $M(x) = c$. Имеем: $M(y) = M(x - M(x)) = M(x - c) = M(x) - M(c) = c - c = 0$.

С аналогичной ситуацией мы встретились в § 34, характеризуя разброс значений выборки. Придерживаясь аналогии, рассмотрим случайную величину, равную $(x - M(x))^2$. Её математическое ожидание называют **дисперсией случайной величины** x и обозначают $D(x)$, т. е.

$$D(x) = M(x - M(x))^2.$$

Дисперсия характеризует меру рассеивания случайной величины.

Из определения дисперсии следует, что эта величина принимает только неотрицательные значения, т. е. $D(x) \geqslant 0$ для любой случайной величины x, и принимает значение, равное 0, если случайная величина является константой.

Заметим, что если каждое значение случайной величины изменить на одно и то же число, то это не повлияет на её разброс. Это очевидное соображение подтверждается таким свойство дисперсии: $D(x + c) = D(x)$, где c — произвольная константа.

Дисперсия имеет размерность такую же, как квадрат размерности соответствующей ей случайной величины. Поэтому часто используют величину, равную $\sqrt{D(x)}$. Её обозначают буквой σ и называют **стандартным отклонением** случайной величины, т. е.

$$\sigma = \sqrt{D(x)}.$$

Отметим, что *дисперсия количества успехов в схеме Бернулли с параметрами n и p равна npq* $(q = 1 - p)$. Доказательство этого факта основано на свойствах дисперсии, рассмотрение которых выходит за рамки данного курса.

Пусть в некотором опыте вероятность события A равна 50 %. Означает ли это, что из 100 таких испытаний в 50 гарантированно произойдёт событие A? Конечно нет. Нас не должно удивлять, если в конкретной серии из 100 испытаний событие, вероятность которого равна 50 %, произойдёт, например, 48 или 56 раз. Такое отношение к полученным результатам основано на том, что в серии из 100 испытаний частота события A, равная 0,48 или 0,56, не очень сильно отличается от вероятности события A.

При этом не исключена возможность того, что из 100 испытаний событие A, вероятность которого равна 50 %, на самом деле произойдёт, скажем, 95 раз или, наоборот, произойдёт всего лишь 5 раз. Однако такие результаты могут вызвать удивление, поскольку частота, равная 0,95 или 0,05, значительно отличается от вероятности события A.

Наш опыт говорит, что при большом количестве испытаний частота события A примерно равна вероятности события A. В теории вероятностей доказана теорема, которая подтверждает этот вывод. Такую теорему относят к циклу теорем о **законе больших чисел.**

Упрощённый смысл закона больших чисел состоит в том, что если в отдельном испытании случайные факторы оказывают значительное влияние на результат испытания, то при многократном повторении одного и того же испытания эти случайные факторы взаимнокомпенсируются и их влияние на результат в среднем уменьшается.

Например, если при одном ударе по мячу случайные факторы (порыв ветра, неровность футбольного поля и т. д.) привели к тому, что мяч не попал в ворота, то при другом ударе эти же факторы могут привести к голу.

Прежде чем сформулировать упомянутую теорему, приведём несколько примеров.

Пусть в некотором опыте вероятность события A равна p. Проведём серию из n таких испытаний. Вы знаете, что такую серию испытаний называют схемой Бернулли с параметрами n и p. Обозначим через x_n случайную величину, равную частоте события A в этой серии. Вероятность того, что $x_n = \frac{m}{n}$, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$ и $0 \leqslant m \leqslant n$. Поэтому таблица распределения вероятностей случайной величины x имеет такой вид:

Значение x_n	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	...	1
Вероятность	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$	...	p^n

Например, при $n = 10$ и $p = 40$ % получим следующую таблицу распределения вероятностей (здесь и ниже вероятности подсчитаны с точностью до 0,1 %):

Значение x_{10}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Вероятность, %	0,6	4	12,1	21,5	25,1	20,1

Значение x_{10}	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Вероятность, %	11,1	4,2	1,1	0,2	0

На рисунке 38.1 данные этой таблицы представлены в форме гистограммы.

Гистограмма распределения вероятностей частоты события в схеме Бернулли с параметрами $n = 10$, $p = 0{,}4$

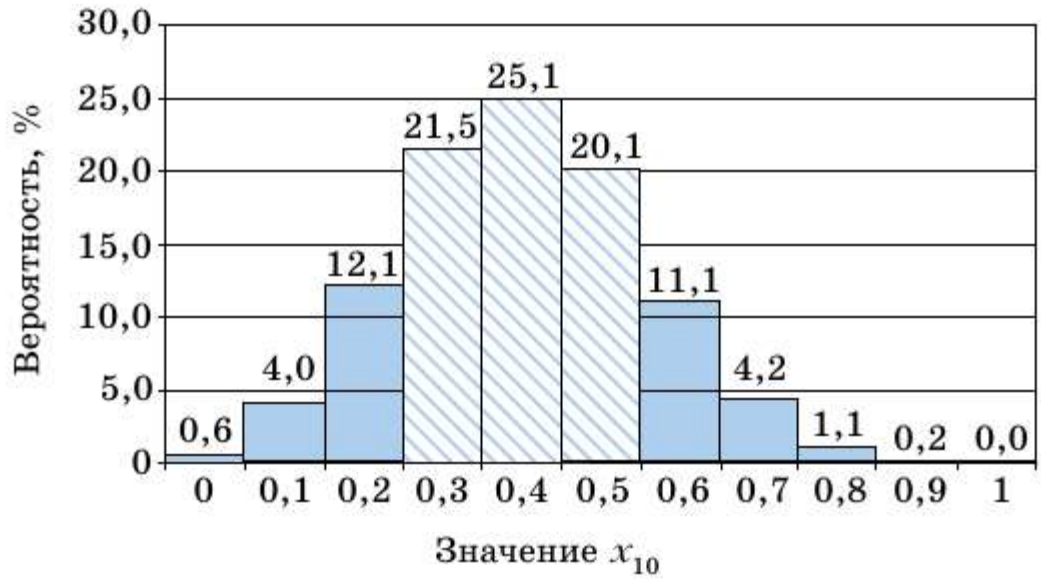


Рис. **38.1**

По этим данным можно оценить вероятность попадания величины x_{10} в тот или иной промежуток. Например, рассмотрим промежуток [0,3; 0,5], содержащий значение вероятности события A. Тогда вероятность того, что частота x_{10} удовлетворяет неравенству $0{,}3 \leqslant x_{10} \leqslant 0{,}5$, равна:

$$p\,(0{,}3 \leqslant x_{10} \leqslant 0{,}5) \approx 21{,}5 + 25{,}1 + 20{,}1 = 66{,}7\ \%.$$

Увеличим число испытаний n до 20 и построим гистограмму распределения вероятностей частоты (рис. 38.2).

В этом случае вероятность того, что частота x_{20} удовлетворяет неравенству $0{,}3 \leqslant x_{20} \leqslant 0{,}5$, будет равна

$$p\,(0{,}3 \leqslant x_{20} \leqslant 0{,}5) \approx 12{,}4 + 16{,}6 + 18{,}0 + 16{,}0 + 11{,}7 = 74{,}7\ \%.$$

Обратите внимание, что с ростом количества испытаний от $n = 10$ до $n = 20$ значение вероятности увеличилось с 66,7 % до 74,7 %.

Если увеличить количество испытаний, например, до $n = 100$ (рис. 38.3), то вероятность того, что частота попадёт между числами 0,3 и 0,5, увеличится ещё значительнее и окажется равной приблизительно 96,8 %.

При дальнейшем увеличении количества испытаний n вероятность того, что частота попадёт между числами 0,3 и 0,5, будет неограниченно приближаться к значению 1. Это свойство в общем виде выражает теорема, относящаяся к серии теорем о законе больших чисел.

Гистограмма распределения вероятностей частоты события в схеме Бернулли с параметрами $n = 20$, $p = 0{,}4$

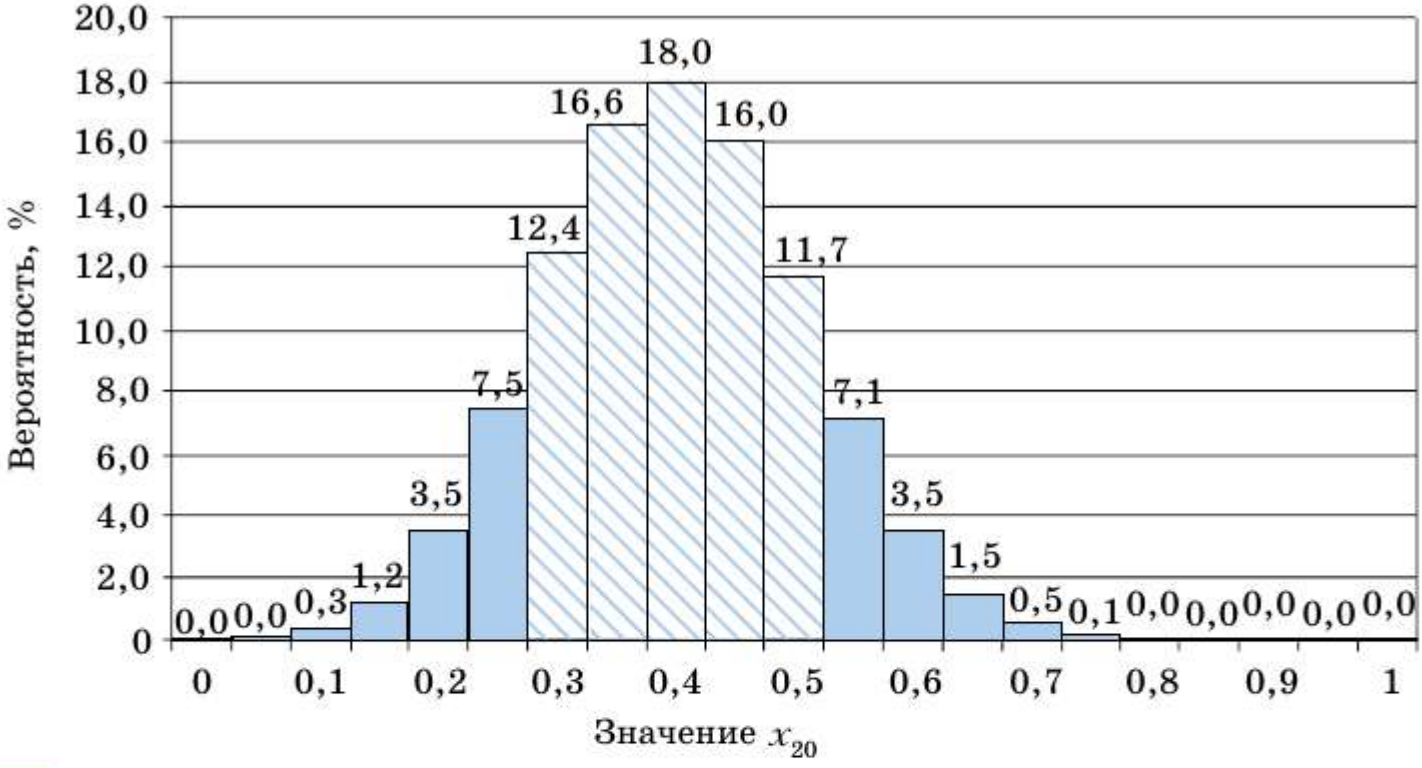


Рис. **38.2**

Гистограмма распределения вероятностей частоты события в схеме Бернулли с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}4$

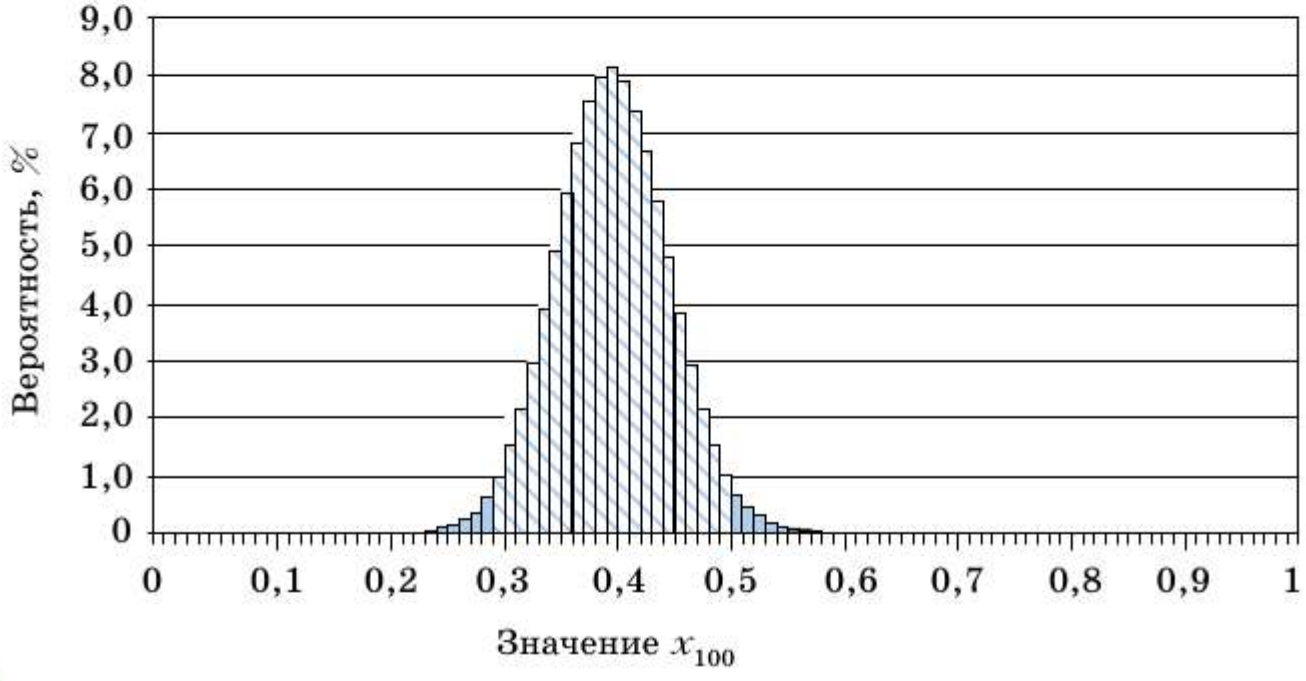


Рис. **38.3**

Теорема

Пусть событие A имеет вероятность p. Обозначим через x_n случайную величину, равную частоте события A в серии из n испытаний Бернулли. Тогда для любого числа $\delta > 0$ вероятность того, что выполняется двойное неравенство $p - \delta \leqslant x_n \leqslant p + \delta$, неограниченно приближается к 1 с ростом числа испытаний n.

Закон больших чисел имеет широкое применение. Например, он используется при статистических расчётах в таких областях, как социология, страхование, здравоохранение, экономика и др.

Так, в социологии закон больших чисел незаменим при анализе процентного распределения ответов опрашиваемых. Исследование, проведённое на репрезентативной выборке, может быть распространено на всю генеральную совокупность. Другими словами, закон больших чисел позволяет судить о многих на основании знания о немногих. Примером такого исследования является экзит-пол — выборочный опрос граждан, проводимый на выходе из избирательных участков после голосования. Экзит-пол является одной из форм контроля обществом честности проведения выборов.

1. Что называют математическим ожиданием случайной величины?
2. Чему равно математическое ожидание числа успехов в схеме Бернулли?
3. Чему равно математическое ожидание суммы случайных величин?
4. Что называют дисперсией случайной величины?
5. Что называют стандартным отклонением случайной величины?

Упражнения

38.1. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании результатов выступления команды за прошлые годы распределение вероятностей количества золотых медалей, завоёванных командой на олимпиаде, можно оценить так:

Количество золотых медалей в команде	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность, %	4	0	16	20	36	16	8

Найдите математическое ожидание количества золотых медалей команды России на очередной Международной математической олимпиаде.

38.2. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании результатов выступления команды за прошлые годы распределение вероятностей количества серебряных медалей, завоёванных командой на олимпиаде, можно оценить так:

Количество серебряных медалей в команде	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность, %	8	28	40	16	4	0	4

Найдите математическое ожидание количества серебряных медалей команды России на очередной Международной математической олимпиаде.

38.3. Случайная величина x равна количеству препаратов, проданных аптекой одному покупателю за одну покупку. Известно, что $p(x = k) = c(4k - k^2)$ для всех $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Найдите математическое ожидание количества препаратов, проданных аптекой одному покупателю за одну покупку.

38.4. Случайная величина y равна количеству школьников на очередном занятии математического кружка. Известно, что $p(y = k) = ak^2$ для всех $k = 4, 5, 6, 7, 8$. Найдите математическое ожидание количества школьников на занятии математического кружка.

38.5. Таблица распределения вероятностей выигрыша в азартной игре имеет вид:

Величина выигрыша, р.	0	100	400	1600
Вероятность, %	75	21	3	1

Цена билета для участия в игре составляет 50 р. Стоит ли играть в такую игру?

38.6. Фермер, выращивающий горох, сомневается, использовать ли ему семена нового сорта. Цена семян нового сорта такова, что их имеет смысл использовать только в том случае, если урожайность гороха увеличится на 10%. Собрав урожай с двух экспериментальных участков, фермер оценил распределение количества горошин в

стручке старого и нового сортов. Стоит ли фермеру использовать семена нового сорта?

Количество горошин в стручке гороха нового сорта	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность для гороха старого сорта, %	11	14	19	26	21	6	3
Вероятность для гороха нового сорта, %	2	8	18	21	25	22	4

38.7. Общественная организация проводит беспроигрышную лотерею, прибыль от которой пойдёт на благотворительные цели. Каждый участник лотереи жертвует 400 р. и получает за это лотерейный билет, внутри которого написана сумма денежного приза. Таблица распределения вероятностей суммы приза имеет такой вид:

Сумма приза, р.	100	200	300	1000	5000
Вероятность	0,5	0,25	0,2	0,04	0,01

Оплата призов происходит за счёт пожертвованных средств. Какую сумму для благотворительных целей ожидает получить организация с одного лотерейного билета?

◆ ◆ ◆

38.8. Чему равно математическое ожидание количества выпавших пятёрок при подбрасывании трёх игральных кубиков? Подтвердите ответ расчётом, основанным на определении математического ожидания.

38.9. Чему равно математическое ожидание количества выпавших гербов при подбрасывании семи монет? Подтвердите ответ расчётом, основанным на определении математического ожидания.

38.10. Найдите дисперсию случайной величины, равной количеству очков, выпавших при однократном подбрасывании игрального кубика. Ответ округлите до сотых.

Упражнения для повторения

38.11. Числа p и $8p^2 + 1$ — простые. Найдите p.

38.12. Числа p и $p^{p+1} + 2$ — простые. Найдите p.

Итоги главы 6

Объединение событий

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из двух событий A или B, называют объединением событий A и B. Объединение событий A и B обозначают $A \cup B$.

Пересечение событий

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит и событие A, и событие B, называют пересечением событий A и B. Пересечение событий A и B обозначают $A \cap B$.

Вероятность объединения двух событий

Если A и B — события некоторого испытания, то

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \qquad (2)$$

Дополнение события

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда не происходит событие A, называют дополнением события A. Дополнение события A обозначают $\overline{A}$.

Вероятность пересечения двух событий

Пусть A и B — события некоторого испытания. Тогда

$$p(A \cap B) = p(A)\, p_A(B).$$

Независимые события

Пусть A и B — события некоторого испытания. Если вероятность события A не изменяется от того, произошло ли событие B, а вероятность события B не изменяется от того, произошло ли событие A, то события A и B называют независимыми.

Вероятность пересечения независимых событий

Если события A и B некоторого испытания являются независимыми, то $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Схема Бернулли для испытаний с успешным исходом

Вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p ровно m испытаний завершатся успешным исходом, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

Случайная величина

Случайной величиной называют величину, значения которой определяются результатами испытания с числовыми исходами.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.
2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой при помощи руководителя проекта составляется окончательный план.
3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.
4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.
5. Примерный объём работы — 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.
6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Выдающиеся российские математики

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) Большая советская энциклопедия, 3-е изд., т. 15, Ломоносов Михаил Васильевич
2) Большая советская энциклопедия, 3-е изд., т. 29, Чебышев Пафнутий Львович
3) http://www.mi.ras.ru/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
4) http://ru.wikipedia.org/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (раздел «Знаменитые сотрудники»)
5) http://www.kolmogorov.info/ Колмогоров Андрей Николаевич
6) http://ru.wikipedia.org/ Категория: История математики в России

2. Симметрия в алгебре

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. — М. : МЦНМО, 2002.
2) *Курляндчик Л., Фомин Д.* Теорема Виета и вспомогательный многочлен // Квант. — 1984. — № 12.
3) *Парамонова И. М.* Симметрия в математике. — М. : МЦНМО, 2002.
4) http://mmmf.msu.ru/ Малый мехмат МГУ
5) http://school-collection.edu.ru/catalog/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов
6) http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики

3. Системы линейных неравенств и решение экономических задач

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Олейников Б., Бузницкий П., Дубсон М.* Симплекс-метод // Квант. —1976. — № 7.
2) *Солодовников А. С.* Системы линейных неравенств. — М. : Наука, 1977.
3) *Рейтман М. И.* Транспортная задача // Квант. — 1974. — № 6.
4) http://ilib.mccme.ru/plm/ Барсов А. С. Что такое линейное программирование. Популярные лекции по математике. Вып. 33.
5) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант» (1989. № 6).

4. От тайнописи к криптографии

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Василего И. П.* Теория чисел в криптографии (для школьников) : методические указания. — Оренбург : ГОУ ОГУ, 2004.
2) *Жельников В.* Криптография от папируса до компьютера. — М. : ABF, 1996.
3) *Игнатьев Е.* О шифрах // Квант. — 1991. — № 4.
4) *Перельман Я. И.* Живая математика. — М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1967.
5) *Ященко В. В.* Введение в криптографию. — М. : МЦНМО, 1999.
6) http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1157083&uri=node71.html/ Олимпиады по криптографии для школьников
7) http://ru.wikipedia.org/wiki/ История криптографии

5. Эффективные методы доказательства неравенств

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Алексеев Р. Б., Курляндчик Л. Д.* Нетрадиционные способы доказательства традиционных неравенств // Математика в школе. — 1991. — № 4.
2) *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. — М. : Мир, 1965.
3) *Дворянинов С. В., Ясиновый Э. А.* Как получаются симметрические неравенства // Квант. — 1985. — № 5.
4) *Курляндчик Л., Файбусович А.* История одного неравенства // Квант. — 1991. — № 4.

5) *Номировский Д.* Неравенство Караматы // Квант. — 2000. — № 4.
6) *Пинтер Л., Хегедыш Й.* Упорядоченные наборы чисел и неравенства // Квант. — 1985. — № 12.
7) *Седракян Н. М., Авоян А. М.* Неравенства. Методы доказательства. — М. : Физматлит, 2002.
8) *Сивашинский И. Х.* Неравенства в задачах. — М. : Наука, 1967.
9) http://www.bymath.net/studyguide/alg/sec/alg28.html Доказательство неравенств

6. Цепные дроби

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Арнольд В. И.* Цепные дроби. — М. : МЦНМО, 2000.
2) *Бескин Н. М.* Бесконечные цепные дроби // Квант. — 1970. — № 8.
3) *Бескин Н. М.* Цепные дроби // Квант. — 1970. — № 1.
4) *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М. : Высшая школа, 1999.
5) *Устинов А.* Цепные дроби вокруг нас // Квант. — 2010. — № 2.
6) *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М. : ГИФМЛ, 1960.
7) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Непрерывная дробь

7. Геометрическая вероятность

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Васильев Н.* Геометрические вероятности // Квант. — 1991. — № 1.
2) *Васильев Н., Спивак А.* Посчитаем вероятности // Квант. — 1997. — № 4.
3) *Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.* Комбинаторика. — ФИМА : МЦНМО, 2006.
4) *Горбачёв Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.
5) *Мостеллер Ф.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач. — М. : Наука, 1971.
6) *Шень А.* Вероятность: примеры и задачи. — М. : МЦНМО, 2007.
7) http://school-collection.edu.ru/catalog/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов

8. Алгебра высказываний

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. — 3-е изд. — М. : МЦНМО, 2005.
2) *Градштейн И.* Прямая и обратная теоремы. — М. : Наука, 1972.
3) *Гжегорчик А.* Популярная логика. — М. : Наука, 1979.
4) *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. — М. : Мир, 1998.
5) *Мадер В.* Школьнику об алгебре логики. — М. : Просвещение, 1993.
6) http://digteh.ru/digital/AlgLog.php/ Законы алгебры логики.
7) http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/ALGEBRA_VISKAZIVANI.html/ Алгебра высказываний

9. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М. : МЦНМО, 2007.
2) *Спивак А. В.* Арифметика. — М. : Бюро Квантум, 2007.
3) http://www.bymath.net/studyguide/alg/sec/alg31.html Бином Ньютона
4) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Исаак Ньютон
5) http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/1040fa23-ac04-b94b-4a41-bd93fbf0d55a/25442/ Треугольник Паскаля и бином Ньютона

10. Возвратные последовательности

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Воробьёв Н. Н.* Числа Фибоначчи. — М. : Наука, 1984.
2) *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. — М. : Наука, 1983.
3) *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М. : МЦНМО, 2007.
4) *Спивак А. В.* Арифметика. — М. : Бюро Квантум, 2007.
5) *Эвнин А. Ю.* Задачи по дискретной математике. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
6) http://hijos.ru/izuchenie-matematiki/algebra-10-klass/5-vozvratnye-posledovatelnosti/ Возвратные последовательности
7) http://ru.wikipedia.org/wiki / Числа Фибоначчи

11. Квадратичные вычеты и невычеты. Квадратичный закон взаимности Гаусса

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

1) *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М. : Высшая школа, 1999.
2) *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. — М. : Наука, 1965.
3) *Заславский А. А.* и др. Математика в задачах. — М. : МЦНМО, 2009.
4) *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М. : МЦНМО, 2007.
5) *Спивак А. В.* Арифметика. — М. : Бюро Квантум, 2007.
6) *Эвнин А. Ю.* Задачи по дискретной математике. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
7) http://www.uic.unn.ru/~zny/compalg/Lectures/ca_02_quadraticresidue.pdf Квадратичные вычеты и невычеты
8) http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=383 Арнольд В. И. Случайны ли квадратичные вычеты?

Дружим с компьютером

Задания курса алгебры 9 класса для выполнения с помощью компьютера

Задания, требующие использования калькулятора, выполняйте с помощью стандартной программы «калькулятор», которая есть на вашем компьютере.

Задания, содержащие элементы программирования, отмечены звёздочкой. Для их выполнения достаточно придумать алгоритм и записать его словами либо в виде блок-схемы. По мере изучения языков программирования вы можете реализовывать эти алгоритмы в виде программ. Наиболее сложные задания отмечены восклицательным знаком.

К § 1 «Функция»

Какие способы задания функции удобны для того, чтобы представить эту функцию с помощью компьютера? Какие инструменты для этого используются?

Какие стандартные функции есть в табличном редакторе, которым вы пользуетесь?

К § 2 «Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции»

! Функция задана таблично. Запишите алгоритм для поиска промежутков знакопостоянства и алгоритм для поиска промежутков возрастания и убывания функции. Можно ли составить такой алгоритм для других способов задания функции? Почему?

! Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке. Можно ли с помощью этой подпрограммы найти все нули этой функции? Сделайте вывод об особенностях решения уравнений с помощью компьютера. Найдите в Интернете информацию о численных методах решения уравнений.

К § 3 «Чётные и нечётные функции»

Задайте в табличном редакторе некоторую функцию для положительных значений аргумента. Дополните таблицу так, чтобы получилась: 1) чётная функция; 2) нечётная функция. Как сделать это автоматически? Постройте средствами табличного редактора график этой функции.

К § 4–6. Построение графиков функций

С помощью табличного редактора задайте какую-либо функцию $y = f(x)$ таблично и постройте её график. Для каждой из функций $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = f(x + a) + b$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$ дополните таблицу так, чтобы получить график этой функции (сделайте так, чтобы нужные значения подсчитывались автоматически по заданным значениям коэффициентов). Постройте таким образом несколько графиков функции для различных значений коэффициентов и поместите эти графики на одном рисунке.

Постройте график какой-либо функции $y = f(x)$ с помощью графического редактора. Получите из этого графика графики функций $y = kf(x)$, $y = f(kx)$,

$y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = f(x + a) + b$ при различных значениях коэффициентов.

Какие значения коэффициентов надо рассмотреть особо?

К § 7 «Квадратичная функция, её график и свойства»

Парабола задана уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Запишите алгоритм для определения таких характеристик параболы: направление ветвей, координаты вершины, точки пересечения с осями координат, — входными данными для которого являются значения a, b, c.

! Пользуясь этим алгоритмом, определите, какой участок параболы целесообразно изобразить на графике. Автоматизируйте процесс составления соответствующей таблицы значений функции и постройте график по полученной таблице.

К § 8 «Решение квадратных неравенств»

Пользуясь таблицей, приведённой в § 8, запишите алгоритм для решения квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, входными данными для которого являются значения a, b, c.

! Какие входные данные надо добавить к этому алгоритму и как изменить его, чтобы с его помощью решать также неравенства $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

К § 10 «Уравнение с двумя переменными и его график»

! Предположим, что уравнение с двумя переменными $f(x; y) = 0$ задано очень сложной формулой $f(x; y)$, поэтому для построения его графика нельзя воспользоваться ни способами, изученными в этом параграфе, ни табличным редактором. Однако существует подпрограмма, позволяющая вычислить значение $f(x; y)$ для заданных значений переменной. Как построить график этого уравнения на экране компьютера? Насколько адекватным будет этот график?

К § 11 «Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными»

Вася Ошибочкин захотел решить систему уравнений таким образом: для каждого из них построить график уравнения, задав в табличном редакторе таблицу соответствующих значений, а затем найти на экране компьютера точки пересечения этих графиков. В чём недостатки этого плана?

К § 12 «Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения»

! Пусть даны два множества, представляющие собой решения двух уравнений с двумя переменными. Запишите алгоритм, который делает вывод: данные уравнения равносильны; одно из них является следствием другого (если да, то какое именно). С помощью какой структуры данных вы представите множество решений уравнения с двумя переменными?

К § 13 «Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными»

! Запишите алгоритм, который определяет, является ли многочлен: 1) однородным; 2) симметрическим.

! Пользуясь алгоритмом, определяющим тип многочлена, запишите алгоритм, который выдаёт рекомендацию о применении способов решения системы двух уравнений с двумя переменными, изученных в этом параграфе.

К § 16 «Системы неравенств с двумя переменными»

! Пусть имеется несколько функций $f_i(x; y)$ и для каждой из них существует подпрограмма, позволяющая вычислить значение функции $f_i(x; y)$ для заданных значений переменных. Как построить на экране компьютера график решения системы неравенств, каждое из которых имеет вид $f_i(x; y) > 0$?

К § 18 «Неравенства между средними величинами. Неравенство Коши — Буняковского»

* Напишите программу для вычисления среднего квадратичного, среднего арифметического, среднего геометрического, среднего гармонического данных чисел a и b. Проверьте с её помощью выполнение соотношения между этими величинами.

К главе 5 «Числовые последовательности»

В табличном редакторе можно заполнять ячейки таблицы членами последовательности, заданной с помощью формулы n-го члена последовательности и с помощью рекуррентной формулы. Освойте эти способы заполнения таблицы. Создайте механизмы для заполнения ячеек таблицы:

- членами конечной арифметической прогрессии для заданных значений a и d;
- членами конечной геометрической прогрессии для заданных значений b и q.

Исследуйте с помощью этой таблицы поведение арифметической и геометрической прогрессий при $a = b$, $d = q$.

Продемонстрируйте с помощью табличного редактора:

- «поведение» сходящихся и расходящихся последовательностей;
- вычисление суммы первых n элементов бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$.

Ответы и указания

Глава 1. **1.8.** 1) $(-\infty;\ -7) \cup (-7;\ 7) \cup (7;\ +\infty)$; 2) $[4;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$. **1.22.** 3) $\{1\} \cup [2;\ +\infty)$; 4) $\{-1\} \cup [3;\ +\infty)$; 5) $(-2;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 6) $[0;\ +\infty)$. **1.23.** 3) $(-3;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$; 4) $\{-4\} \cup [3;\ +\infty)$; 5) $\{-5\} \cup [-2;\ +\infty)$; 6) $(0;\ +\infty)$. **1.24.** 1) $\left(-\infty;\ -\frac{23}{8}\right]$; 2) $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$. **1.25.** 1) $\left[\frac{19}{20};\ +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\ \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5};\ +\infty\right)$; 3) $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$. **1.26.** Рисунок 1. **1.27.** 1) $[-4;\ 1]$; 2) $\left[-\frac{1}{2};\ 2\right]$; 3) $[-3;\ 2]$; 4) $[-2;\ 2]$; 5) $[-4;\ 4]$; 6) $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. **1.28.** 1) $[-10;\ 0]$; 2) $[-27;\ 3]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $[-1;\ 1]$; 5) $[0;\ 1]$; 6) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{9}\right] \cup [1;\ +\infty)$. **1.29.** 1) $\boldsymbol{Q}$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$; 3) $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$; 4) $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$; 5) $\boldsymbol{Q}$. **1.30.** 1) $\{1\}$; 2) $\{0,\ 1\}$; 3) $\boldsymbol{Q}$. **1.31.** 1) $\{0,\ 1\}$; 2) $\{0\}$. **1.32.** 3) Рисунок 2. *Указание.* $D(y) = [-1;\ 2)$, $E(y) = \{0,\ 1\}$. **1.33.** 2) Рисунок 3. *Указание.* $D(y) = \boldsymbol{Z}$, $E(y) = \{0\}$. **1.34.** 1) Рисунок 4, *а*; 2) рисунок 4, *б*. **1.35.** 1) Рисунок 5, *а*; 2) рисунок 5, *б*. **1.36.** Рисунок 6. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что если $x \in \boldsymbol{Z}$, то $x^2 \equiv r \pmod 5$ только при $r \in \{0,\ 1,\ 4\}$. **1.38.** Не является. *Указание.* Выясните, какие числа соответствуют числу 0,5. **1.39.** Является. **1.40.** $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{7}$. **1.41.** $g(x) = 13 - 3x$. **1.42.** *Указание.* Покажите, что данная функция — это функ-

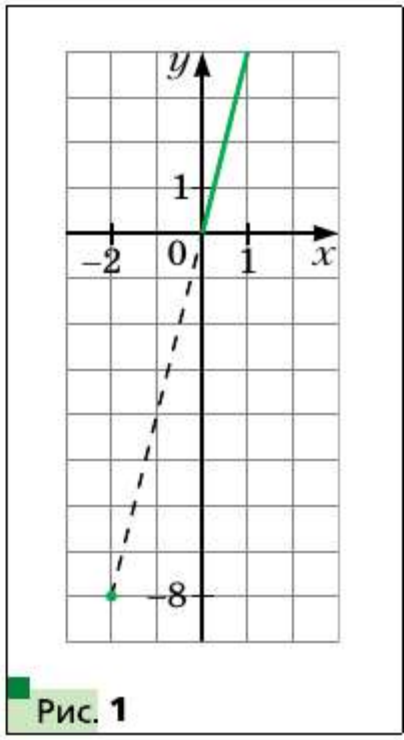


Рис. 1

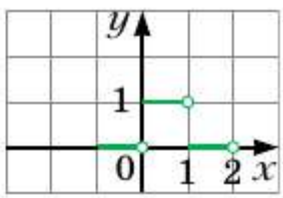


Рис. 2

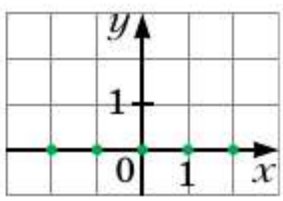
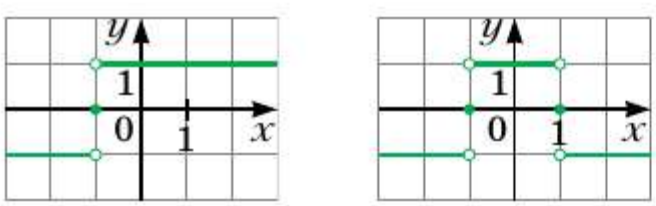
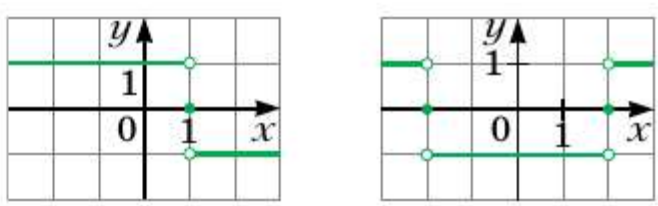


Рис. 3



а *б*

Рис. 4



а *б*

Рис. 5

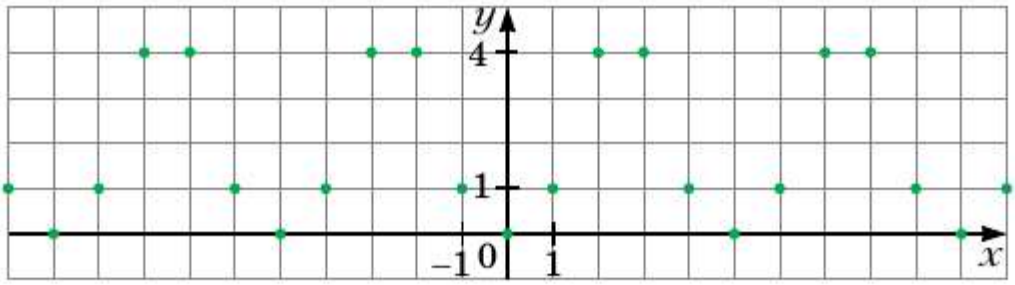


Рис. 6

ция $g(x) = x$, $D(g) = R\backslash\{0, 1\}$. **1.43.** $f(x) = \frac{1}{3} - x$. *Указание*. Так как равенство, данное в условии, выполняется при всех x, то вместо x подставьте $-x$. Получим $f(-x) + 2f(x) = -x + 1$. Из системы $\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x + 1, \\ f(-x) + 2f(x) = -x + 1 \end{cases}$ находим $f(x) = \frac{1}{3} - x$. Осталось проверить, что найденная функция удовлетворяет условию задачи. **1.44.** $f(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$. *Указание*. В данное равенство вместо x подставьте $\frac{1}{x}$. **1.45.** $f(x) = \frac{x + 10}{3}$. *Указание*. В данное равенство вместо x подставьте $1 - x$. **1.46.** 0; –2. *Указание*. Представьте данную функцию в виде $f(x) = (x + 1)^2 - 1$. Тогда легко установить, что $f(f(f(x))) = (x + 1)^8 - 1$. **1.47.** –5; –4. *Указание*. $f(x) = (x + 5)^2 - 5$. **1.48.** 1. *Указание*. Очевидно, что $x^2 - x + 1 \geqslant x$. Тогда $f(f(x)) \geqslant f(x) \geqslant x$. **2.3.** 2. **2.4.** $m < -2$. **2.5.** Возрастает на каждом из промежутков вида $[k; k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **2.6.** 2) 1; 3) 1; 4) $[0; +\infty)$; 5) $\boldsymbol{Z}$; 6) $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$. **2.7.** 2) $(-\infty; 0]$; 3) 3; 4) $[0; 1)$; 5) $\{0\} \cup (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q})$; 6) $\frac{1}{2}$. **2.8.** 4) $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$; 6) $(k; k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **2.9.** 5) $(1; 3)$, $(3; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0)$, $[1; +\infty)$. **2.20.** Возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$, убывает на промежутке $[0; +\infty)$. *Указание*. Воспользуйтесь теоремой 2.4. **2.22.** Возрастает на промежутке $[a; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; a]$. **2.23.** *Указание*. Воспользуйтесь теоремами 2.2 и 2.3. **2.26.** 1) $\min\limits_{M} f(x) = 1$, наибольшего значения не существует; 2) $\min\limits_{[-4; 4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-4; 4]} f(x) = 4$. **2.27.** 1) $\max\limits_{M} f(x) = 13$, наименьшего значения не существует; 2) $\min\limits_{[0; 2]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[0; 2]} f(x) = 1$. **2.28.** 1) 2; 2) 2; 3) 1. **2.29.** 1) Возрастающая; 2) возрастающая. **2.30.** 1) Убывающая; 2) убывающая. **2.31.** $a = 0$. *Указание*. Из теоремы 2.5 следует, что данная функция должна иметь не более одного нуля. **2.32.** $a = 1$. **2.33.** $a \leqslant 2$. **2.34.** $a \leqslant 1$. **2.35.** 1) –1. *Указание*. Докажите, что левая часть уравнения задаёт возрастающую функцию; 2) 3; 3) 2. **2.36.** 1) 1; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$.

2.37. 1) 9. *Указание.* Докажите, что левая и правая части уравнения задают функции, одна из которых является возрастающей, а другая — убывающей; 2) 1. **2.38.** 1) 4; 2) 4. **2.39.** 0. **2.40.** 0. **2.41.** (2; 2), (–2; –2). *Указание.* Первое уравнение системы перепишем так: $x^7 + x = y^7 + y$. Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t$. Она является возрастающей. Тогда $x = y$. **2.42.** (1; 1). **2.43.** (1; 0), (0; 1). *Указание.* Рассмотрите функцию $f(t) = 2\sqrt{t} + t^4$. Она является возрастающей. **2.44.** *Указание.* См. пример 7 в § 2. **2.46.** 3. *Указание.* См. пример 5 в § 2. **2.47.** 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *Указание.* Перепишите данное уравнение так: $\frac{\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3+1}{2} = x$. Рассмотрите функцию $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$. **2.48.** Не может. *Указание.* Докажите, что $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$. **2.49.** (0; 2), (4; 2). **3.6.** 5) Чётная; 6) нечётная. **3.7.** Чётная. **3.8.** Чётная. **3.9.** Нечётная. **3.11.** 0. **3.13.** 0. **3.14.** 0. **3.15.** Чётная. **3.16.** Нечётная. **3.17.** Убывающая. **3.18.** Возрастающая. **3.19.** 2; 5. **3.20.** –3; –1. **3.21.** 0. *Указание.* Докажите, что функция f является постоянной на промежутке $[-5; 5]$. **3.22.** 1) $a = 1$. *Указание.* Покажите, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ равенство $(x-1)^4 + a(x+1)^4 = (x+1)^4 + a(x-1)^4$ выполняется только при $a = 1$; 2) $a = -1$. **3.23.** $a = 1$. *Указание.* См. пример 3 в § 3. **3.24.** *Указание.* Данное выражение задаёт чётную функцию. Докажите, что многочлен, задающий чётную функцию, не содержит одночленов нечётной степени. **3.25.** $\sqrt{a-3}+1$. **3.26.** 2; 3; $\frac{5-\sqrt{89}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{89}}{2}$. **4.20.** $\sqrt{2}+1$. **4.21.** $a = 2$. **5.12.** а) $y = (x-2)^2$; б) $y = -3(x+3)^2$. **5.13.** а) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2$; б) $y = -2(x-1)^2$. **5.14.** а) $y = (x+2)^2 - 4$; б) $y = -(x-2)^2 + 5$; в) $y = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 1$. **5.15.** а) $y = (x-4)^2 - 5$; б) $y = -2(x+6)^2 + 7$. **5.22.** 2) *Указание.* $y = \frac{-2x+2-2}{x-1} = -2 - \frac{2}{x-1}$; 3) *Указание.* $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+\frac{1}{2}}$. **5.24.** 2) Рисунок 7.

Указание. $y = \sqrt{x} \longrightarrow y = \sqrt{1+x} \longrightarrow y = \sqrt{1-\frac{x}{2}}$. **5.26.** Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то один корень; если $a > 0$, то два корня. *Указание.* Рассмотрите графики функций $f(x) = a - |x|$ и $g(x) = x^2$. **5.27.** $a < 0$. **5.28.** Если $a \leqslant 1$, то один корень; если $a > 1$, то корней

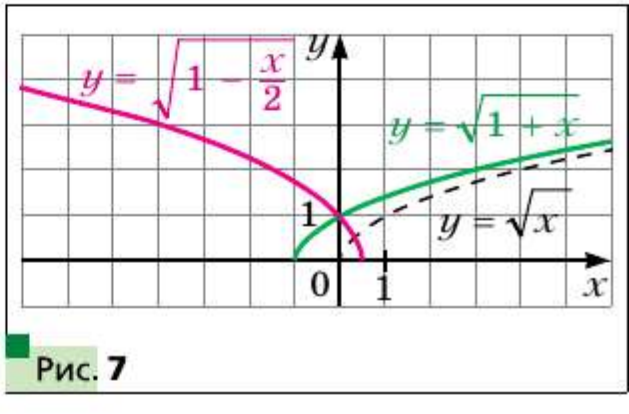


Рис. 7

нет (рис. 8). **5.29.** Если $a \geqslant -2$, то один корень; если $a < -2$, то корней нет. **5.30.** Если $a \leqslant 1$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = |1 - a|$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |3 - a|$; если $1 < a < 2$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |3 - a|$; если $a = 2$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 1$; если $2 < a < 3$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |1 - a|$; если $a \geqslant 3$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = |3 - a|$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |1 - a|$ (рис. 9). **5.32.** Если $a \neq 0$, то два кор-

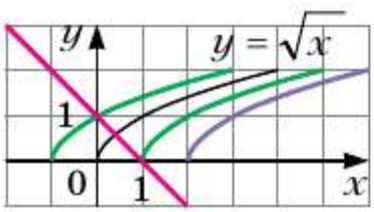


Рис. 8

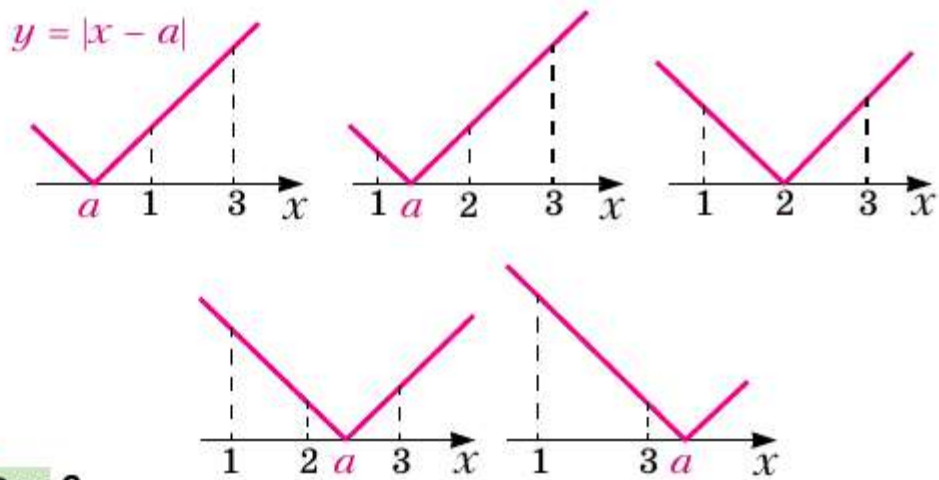


Рис. 9

ня; если $a = 0$, то один корень (рис. 10). **5.33.** Если $|a| > 2$, то корней нет; если $|a| = 2$, то бесконечно много корней; если $|a| < 2$, то два корня. *Указание*. Запишите уравнение так: $2 - |x| = |x - a|$ и воспользуйтесь рисунком 11. **5.34.** Если $|a| > \frac{3}{4}$, то два корня; если $|a| = \frac{3}{4}$, то один корень; если $|a| < \frac{3}{4}$, то корней нет. *Указание*. Рисунок 12. Значения параметра a,

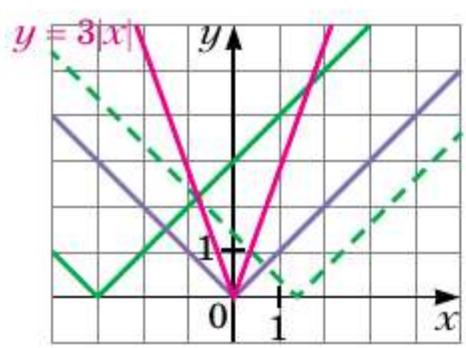


Рис. 10

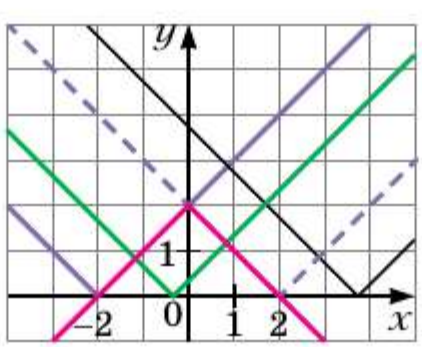


Рис. 11

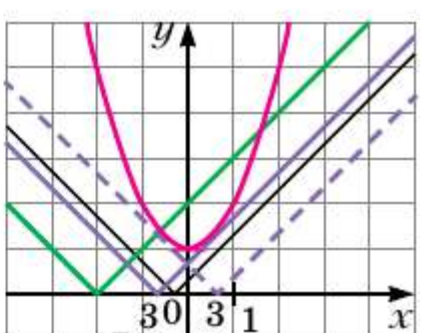


Рис. 12

при которых прямая и парабола имеют одну общую точку, можно найти из условия, что квадратные уравнения $x - a = x^2 + 1$ и $a - x = x^2 + 1$ должны иметь один корень. **5.35.** Если $|a| > \frac{9}{4}$, то корней нет; если $|a| = \frac{9}{4}$, то один корень; если $|a| < \frac{9}{4}$, то два корня. **5.36.** (1; −1), (1; 2), (5; −1), (5; 2).

5.37. -4. **6.3.** 1) $[-7; 7]$; 2) $[-3; 7]$, $[0; 6]$. **6.4.** 1) -2; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2; 2)$; 2) -3; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty)$. **6.8.** 3) Рисунок 13. *Указание*. Воспользуйтесь схемой: $y = \sqrt{x} \longrightarrow y = \sqrt{x+2} \longrightarrow y = \sqrt{|x|+2} \longrightarrow y = \sqrt{|x-1|+2}$. **6.10.** 1) Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a > 1$, то два корня; если $a = 1$, то три корня; если $0 < a < 1$, то четыре корня; 2) если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то три корня; если $0 < a < 1$, то шесть корней; если $a = 1$, то четыре корня; если $a > 1$, то два корня; 3) если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a > 2$, то один корень; если $0 < a < 2$, то два корня. **6.11.** 3) Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a = 3$, то четыре корня; если $0 < a < 1$, то восемь корней; если $a = 1$, то семь корней; если $1 < a < 3$, то шесть корней; если $a > 3$, то два корня. **6.16.** 1) Рисунок 14. *Указание*.

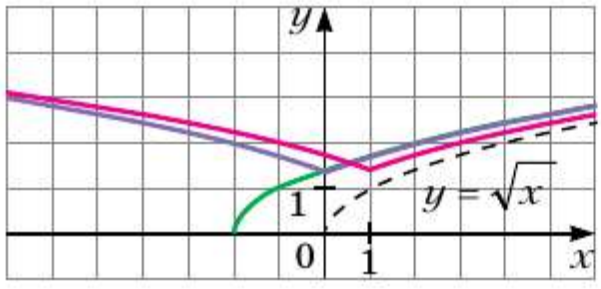


Рис. **13**

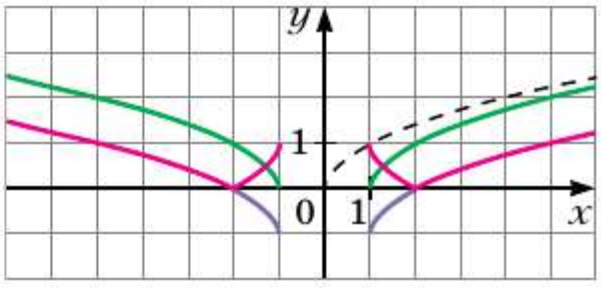


Рис. **14**

Воспользуйтесь схемой: $y = \sqrt{x} \longrightarrow y = \sqrt{x-1} \longrightarrow y = \sqrt{|x|-1} \longrightarrow$ $\longrightarrow y = \sqrt{|x|-1}-1 \longrightarrow y = \left|\sqrt{|x|-1}-1\right|$. **6.18.** $a = 0$ или $a = 2$. **6.19.** $a = 1$ или $a = -5$. **6.20.** $a = -2$ или $a = -\frac{1}{2}$. **6.21.** $a = 1$ или $a = -\frac{1}{3}$. **6.22.** $a = -\frac{1}{2}$. **6.23.** $a = \frac{8}{3}$. **6.24.** $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **6.25.** $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **7.8.** 1) два корня; 2) один корень. **7.9.** три корня. **7.10.** 1) $(-1; -1)$, $(9; 9)$; 2) $(2; 23)$, $(8; 17)$. **7.11.** $(3; 15)$, $(-1; 11)$. **7.12.** 1) -25; 2) -13; 3) -22. **7.13.** 1) 26; 2) 17; 3) -10. **7.14.** $p = 1$, $q = 4$. **7.15.** $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$. **7.16.** $a = 3$, $b = 5$. **7.19.** $a = 9$. **7.20.** $b = -16$. **7.21.** $b = 18$. **7.22.** $a \leqslant -1$. **7.23.** $a \geqslant 3$. **7.24.** $a = 0$, или $a = 1$, или $a = 4$. **7.25.** $c = -8$. **7.26.** $c = 14$. **7.27.** $c > 14$. **7.28.** $a = \frac{3}{2}$ или $a = -\frac{5}{2}$. *Указание*. Уравнение $x^2 - 2ax + 3 = x - 1$ должно иметь единственное решение. **7.29.** $a = -5$. **7.30.** а) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; б) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **7.32.** Нет. *Указание*. Докажите, что числа a и c разных знаков. **7.33.** $c > 0$. *Указание*. Из условия следует, что $f(1) > 0$. **7.34.** 1; 3. **7.35.** $a = -3$, или $a = -1$, или $a = 1$, или $a = 3$. *Указание*. Модули координат вершины параболы равны. **7.36.** $-2 < a < 0$. **7.37.** $p = -4$, $q = 9$. **7.38.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$.

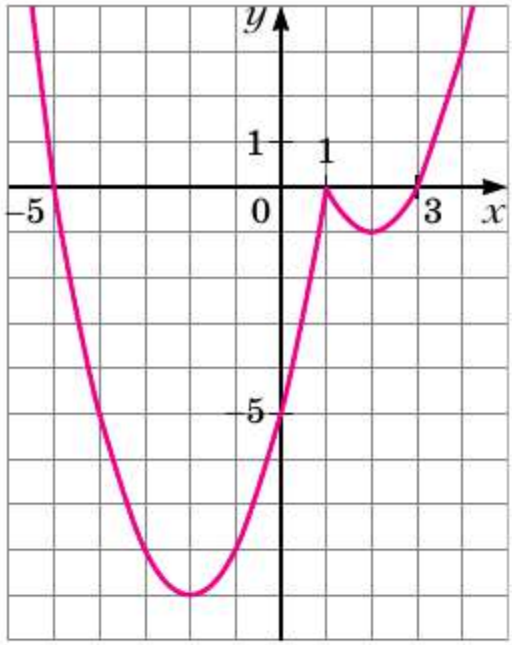


Рис. **15**

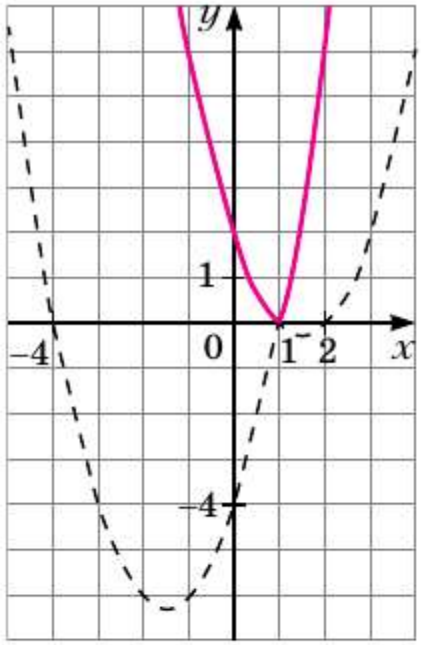


Рис. **16**

7.39. а) –4; б) 4. **7.40.** –1. **7.45.** 1) Рисунок 15. **7.46.** 2) Рисунок 16. **7.49.** Два корня. **7.50.** Нет. *Указание*. Графики должны пересекаться в точке, абсцисса которой равна 1. **7.51.** Нет. *Указание*. Докажите, что $a = c$. Тогда число –1 — нуль линейной функции. **7.53.** –1. *Указание*. $f(1) \geqslant 0$. **7.54.** *Указание*. Координаты вершин парабол имеют вид $(a; a+1)$.

7.56. *Указание*. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ если } x \leqslant 1, \\ -1, \text{ если } 1 < x < 2, \\ x^2 - 4x + 3, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$ **7.58.** $\frac{25}{16}$. *Указание*. Рассмотрите функцию $f(t) = t^2 + 2t + 2$, $D(f) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **7.59.** $a = 3$ или $a = \frac{13}{4}$. *Указание*. Рисунок 17. **7.60.** $-\frac{5}{4} < a < \frac{21}{4}$. *Указание*. Надо найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 4x + 3 + |x - a| < 2$ имеет хотя бы одно решение. **7.61.** $a = 1$. *Указание*. Покажите, что $x_1^2 + x_2^2 = 2(a^2 + a - 1)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения. Данное уравнение имеет корни, если его дискриминант $D = 4a - 4 \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant 1$. Поэтому надо исследовать на наименьшее значение функцию $f(a) = 2(a^2 + a - 1)$, $D(f) = [1; +\infty)$. **7.62.** $a = 2$. **7.63.** Если $a < -\frac{3}{4}$, то четыре корня; если $-\frac{3}{4} \leqslant a < \frac{1}{4}$, то два корня; если $a = \frac{1}{4}$, то один корень; если $a > \frac{1}{4}$, то корней нет. *Указание*. Рассмотрев данное уравнение как квадратное относительно a, получаем такую совокупность: $\begin{cases} a = -x^2 + x, \\ a = -x^2 - x - 1. \end{cases}$ На координатной плоскости xa постройте график данного уравнения. **7.64.** Все точки, лежа-

щие ниже параболы $y = -x^2 - 3$. *Указание*. Имеем: $2a^2 - 4ax + x^2 - y - 3 = 0$. Рассмотрите это равенство как квадратное уравнение относительно a. Его дискриминант $D = 8x^2 + 8y + 24$ должен быть отрицательным. **7.65.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $f(0)\,f(1) = f(c)$. **7.66.** *Указание*. Пусть парабола пересекает оси координат в точках $A\,(0;\,y)$, $B\,(x_1;\,0)$ и $C\,(x_2;\,0)$, где x_1 и x_2 — нули квадратичной функции (рис. 18). Окружность, прохо-

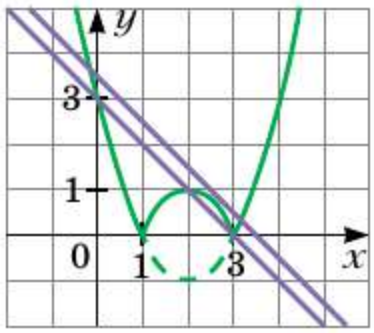


Рис. **17**

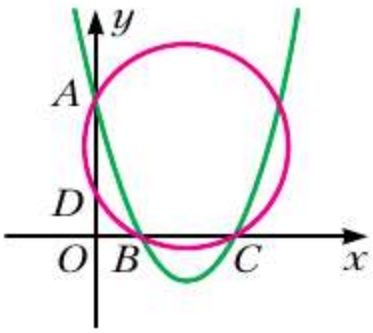


Рис. **18**

дящая через точки A, B и C, пересекает ось ординат в точке D. Имеем: $OB \cdot OC = OA \cdot OD$. Далее, воспользовавшись теоремой Виета, покажите, что окружность проходит через точку (0; 1). **7.68.** *Указание*. Обозначим $a = x$ и рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + b^2 + c^2 - x^2b - b^2c - c^2x - 1$. Имеем: $f(x) = (1 - b)x^2 - c^2x + b^2 + c^2 - b^2c - 1$. Если $b \neq 1$, то графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, а значит, наибольшее значение на отрезке [0; 1] функция принимает в одной из точек $x = 0$ или $x = 1$. Тогда достаточно доказать два неравенства: $f(0) \leqslant 0$ и $f(1) \leqslant 0$. Случай $b = 1$ рассмотрите отдельно. **7.69.** $(-\infty;\,-3) \cup (-3;\,-2)$. **7.70.** 1. **8.5.** 1) $(-2;\,1)$; 2) $(-\infty;\,-5] \cup [2;\,+\infty)$; 3) $\left[-3;\,-\frac{1}{3}\right]$. **8.6.** 1) $(-\infty;\,1] \cup [4;\,+\infty)$; 2) $(-5;\,-3)$; 3) $\left(\frac{1}{6};\,\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty;\,-10) \cup (1;\,+\infty)$. **8.7.** 1) -6; 2) -2. **8.8.** 1) 1; 2) -3. **8.13.** 1) $-8 < a < 12$. **8.14.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ или $b > 1$; 2) $b < 4$ или $b > 10$. **8.15.** 1) $(0;\,3]$; 2) $[-4;\,-0{,}5] \cup [6;\,+\infty)$; 3) $[-1;\,0) \cup (6;\,10]$; 4) $(-5;\,-3]$. **8.16.** 1) $\left(-\infty;\,\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3};\,3\right)$; 2) $(-2;\,0] \cup [5;\,9)$. **8.17.** 1) -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2) -3; -2; 1; 2. **8.18.** 1) $(6;\,+\infty)$; 2) $(-3;\,5) \cup (5;\,6)$; 3) $(-\infty;\,-9) \cup (-9;\,-2] \cup [7;\,9) \cup (9;\,+\infty)$; 4) $\left(-1;\,\frac{2}{3}\right)$. **8.19.** 1) $[-2;\,2)$; 2) $(-5;\,6) \cup (6;\,7)$. **8.20.** 1) $(-11;\,11)$; 2) $\left(-\infty;\,-\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8};\,+\infty\right)$; 3) $[-5;\,-3] \cup [3;\,5]$; 4) $(-\infty;\,-1) \cup \left(-\frac{1}{4};\,\frac{1}{4}\right) \cup (1;\,+\infty)$. **8.21.** 1) $(-\infty;\,-1] \cup [-0{,}4;\,0{,}4] \cup [1;\,+\infty)$; 3) $\left(-\frac{1}{2};\,-\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\,\frac{1}{2}\right)$. **8.22.** 1) $(-3;\,4)$; 2) $(1;\,4)$; 3) $(-\infty;\,1) \cup (3;\,+\infty)$; 4) $[-1;\,0] \cup [1;\,6]$; 5) $(-\infty;\,1)$; 6) $[-4;\,2] \cup$

$\cup\left[3+\sqrt{17};+\infty\right)$. **8.23.** 1) $(-6;-3)\cup(-2;1)$; 2) $\left(-1-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(-2;-1+\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$; 4) $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$; 5) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$; 6) $(-2;3)$. **8.24.** 1) $a>4$; 2) $-1\leqslant a\leqslant\frac{3}{5}$; 3) $a>\frac{5}{3}$; 4) $a>6$. **8.25.** 1) $a\geqslant 9$; 2) $3\leqslant a\leqslant 7$; 3) $a\geqslant 1$; 4) $a\geqslant 4$. **8.26.** $a\geqslant\frac{9}{2}$. **8.27.** $a<-16$. **8.28.** $\frac{8-2\sqrt{7}}{9}$; $\frac{8+2\sqrt{7}}{9}$. **8.29.** 1) Если $a<1$, то $a<x<1$ или $x>4$; если $1\leqslant a\leqslant 4$, то $x>4$; если $a>4$, то $x>a$; 2) если $a\leqslant-\frac{1}{4}$, то решений нет; если $-\frac{1}{4}<a\leqslant 1$, то $-\frac{1}{4}\leqslant x<a$; если $a>1$, то $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$. **8.30.** 1) Если $a\leqslant -8$, то $-8<x<9$; если $-8<a<9$, то $a<x<9$; если $a\geqslant 9$, то решений нет; 2) если $a<1$, то $x<a$; если $1\leqslant a\leqslant 8$, то $x<1$; если $a>8$, то $x<1$ или $8<x<a$. **8.31.** $1\leqslant a\leqslant 2$. *Указание*. Множество решений первого неравенства должно содержать множество решений второго неравенства. Искомые значения параметра a являются решениями системы $\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 3,\\ 1\leqslant 2a-1\leqslant 3.\end{cases}$ **8.32.** $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$. **8.33.** $a\in[-2;0]$. **8.34.** $a\in[0;1]$. **8.35.** $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$. *Указание*. Имеем $f(x)=ax^2+bx+c$. Из условия следует, что $f(1)<0$. Условию задачи соответствует ячейка (5) таблицы в § 8. **8.36.** $\varnothing$. **8.37.** 1) $a=\frac{4}{3}$ или $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$; 2) $0<a<\frac{1}{3}$. **8.38.** 1) $a=\frac{5}{2}$ или $-1\leqslant a\leqslant 1$; 2) $0<a<\frac{3}{2}$. **8.39.** *Указание*. Рассмотрите функцию $f(x)=ax^2+bx+c$. **8.40.** *Указание*. Рассмотрите функцию $f(x)=cx^2+bx+a$. **8.41.** 1; $\sqrt{33}$; $\sqrt{41}$; 7. *Указание*. Можно записать $x^2-8(x-\{x\})+7=0$. Отсюда $x^2-8x+7=-8\{x\}$. Решение уравнения следует искать среди решений системы $\begin{cases}x^2-8x+7\leqslant 0,\\ x^2-8x+7>-8.\end{cases}$ Имеем $x\in[1;3)\cup(5;7]$. Далее рассмотрите пять случаев: 1) $x\in[1;2)$; 2) $x\in[2;3)$; 3) $x\in(5;6)$; 4) $x\in[6;7)$; 5) $x=7$. Для этих случаев $[x]$ равна соответственно 1, 2, 5, 6, 7. **8.42.** 1; $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{19}$; 5. **8.43.** Если $a<0$ или $a=1$, то $x=1$; если $a\geqslant 0$ и $a\neq 1$, то $x=1$ или $x=a^2$. **8.44.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

9.1. 3) $\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty)$. **9.2.** 4) $(-\infty;-5)\cup\left(-\frac{3}{5};0\right)\cup\left(\frac{3}{4};2\right)$. **9.3.** 2) $(-\infty;-1)\cup$ $\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$; 3) $(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};2\right)$. **9.4.** 2) $(-\infty;-4)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;3)$. **9.5.** 1) $\left(-\frac{5}{3};2\right)$; 6) $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. **9.6.** 2) $\left(-\frac{2}{3};3\right)\cup(3;+\infty)$;

3) $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; 1\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$. **9.7.** 4) $(-5; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 8)$; 7) $(-2; 1) \cup$ $\cup (3; 4)$. **9.8.** 5) $(-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; 6) $\left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup (2; 3) \cup (7; +\infty)$; 8) $(-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{3}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty)$. **9.9.** 3) $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-5; -1) \cup (2; 3)$. **9.10.** 3) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup (6; +\infty)$; 6) $\left(-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup$ $\cup [2; +\infty)$. **9.11.** 2) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$. **9.12.** 3) $(-\infty; -6] \cup$ $\cup [-4; 6]$. **9.13.** 1) $(-\infty; -4] \cup [5; +\infty) \cup \{-3\}$; 4) $(-3; -1] \cup \{0\}$. **9.14.** 2) $(-\infty; -5] \cup$ $\cup [-4; 0] \cup \{2\}$; 3) $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup (2; 3] \cup \{7\}$. **9.15.** $[-1; 0) \cup (0; 5] \cup \{-2\}$. **9.16.** $[-3; 0) \cup (0; 4] \cup \{5\}$. **9.17.** 1) $-4 < x < -3$ или $x > 5$; 2) $-4 \leqslant x \leqslant -3$ или $x \geqslant 5$; 3) $x < -4$; 4) $x \leqslant -4$, или $x = -3$, или $x = 5$. **9.18.** 1) $3 < x < 7$; 2) $3 \leqslant x \leqslant 7$ или $x = -2$; 3) $-2 < x < 3$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant 3$ или $x = 7$. **9.19.** $(-3; 0] \cup (3; +\infty)$. **9.20.** $(-4; 1] \cup (4; +\infty)$. **9.21.** 1) $(-\infty; -8] \cup [-3; 3] \cup$ $\cup [8; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$; 4) $\left(-2; 1-\sqrt{7}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$. **9.22.** 1) $[-7; -5] \cup [5; 7]$; 2) $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$; 3) $(-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5)$; 4) $[-1; 0)$. **9.23.** 1) $\left[\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [-1; 1] \cup [4; +\infty)$; 3) $\left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. **9.24.** 1) $[4; 5) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3]$; 3) $(0; +\infty)$. **9.25.** 1) $[3; +\infty)$. *Указание.* Обозначив $2x - 1 = a$ и $x^2 - x - 6 = b$, можно заметить, что данное уравнение имеет вид $|a| + |b| = a + b$. Теперь воспользуйтесь тем, что $|a| + |b| = a + b$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$; 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$. **9.26.** 1) $\left[\frac{2}{3}; 2\right] \cup [3; +\infty)$ 2) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. **9.27.** 1) Если $a \leqslant -\frac{3}{5}$ или $a \geqslant 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$; если $-\frac{3}{5} < a < 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{5}; a\right) \cup (a; 1)$; 2) если $a < -\frac{3}{5}$ или $a > 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{5}; 1\right] \cup \{a\}$; если $-\frac{3}{5} \leqslant a \leqslant 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{5}; 1\right]$. **9.28.** 1) Если $a \leqslant -\frac{3}{7}$ или $a \geqslant 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{7}; 1\right)$; если $-\frac{3}{7} < a < 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{7}; a\right) \cup (a; 1)$; 2) если $a < -\frac{3}{7}$ или $a > 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{7}; 1\right] \cup \{a\}$; если $-\frac{3}{7} \leqslant a \leqslant 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{7}; 1\right]$. **9.29.** 1) Если $a < 1$, то $x \in (a; 1) \cup (1; 3)$; если $1 \leqslant a < 3$, то $x \in (a; 3)$; если $a = 3$, то решений нет; если $a > 3$, то $x \in (3; a)$; 2) если $a \leqslant 1$, то $x \in [a; 3]$; если $1 < a < 3$, то $x \in [a; 3] \cup \{1\}$; если $a = 3$, то $x \in \{1, 3\}$; если $a > 3$, то $x \in [3; a] \cup \{1\}$. **9.30.** 1) Если $a < -2$, то $x \in (a; -2) \cup (-2; 1)$; если $-2 \leqslant a < 1$, то $x \in (a; 1)$; если $a = 1$, то решений нет; если $a > 1$, то $x \in (1; a)$; 2) если $a \leqslant -2$, то $x \in [a; 1]$; если $-2 < a < 1$, то $x \in [a; 1] \cup \{-2\}$; если $a = 1$, то $x \in \{-2, 1\}$;

если $a > 1$, то $x \in [1; a] \cup \{-2\}$. **9.31.** $4\frac{1}{3}$; 5. *Указание.* Можно записать $2\{x\} - \{x\}[x] = [x] + \{x\} - 5$. Отсюда $\{x\}(1 - [x]) = [x] - 5$. Последнее уравнение равносильно такому: $\{x\} = \frac{[x]-5}{1-[x]}$. Теперь понятно, что нужные значения следует искать среди решений системы $\begin{cases} \frac{[x]-5}{1-[x]} < 1, \\ \frac{[x]-5}{1-[x]} \geqslant 0. \end{cases}$ **9.32.** $5\frac{1}{3}$; 6. **9.34.** $\sqrt{a-3}$.

Глава 2. **10.1.** 1) (4; –2); 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 3) (0; 1), (1; 1); 4) (0; 0). **10.2.** 1) (3; –2); 2) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 3) (1; 0), (1; –1); 4) (0; 0). **10.7.** 8) *Указание.* $x = \sqrt{y} \longrightarrow x - 1 = \sqrt{y} \longrightarrow x - 1 = \sqrt{|y|} \longrightarrow x - 1 = \sqrt{|y+1|} \longrightarrow |x| - 1 = \sqrt{|y+1|}$ (рис. 20); 9) *Указание.* $x = \sqrt{y} \longrightarrow x - 1 = \sqrt{y+1} \longrightarrow |x| - 1 = \sqrt{y+1} \longrightarrow |x| - 1 = \sqrt{|y|+1}$ (рис. 21). **10.9.** 4) *Указание.* $x = y^2 \longrightarrow x = (y-1)^2 \longrightarrow |x| = (|y| - 1)^2 \longrightarrow |x + 2| = (|y| - 1)^2$ (рис. 22). **10.13.** 4) *Указание.* $x + y = 2 \longrightarrow |x| + y = 2 \longrightarrow |x| + |y| = 2 \longrightarrow |x - 1| + |y + 2| = 2 \longrightarrow |2x - 1| + |y + 2| = 2$ (рис. 23). **10.14.** 4) *Указание.* $x - y = 2 \longrightarrow |x| - y = 2 \longrightarrow |x| - |y| = 2 \longrightarrow |x + 1| - |y - 1| = 2 \longrightarrow |x + 1| - |2y - 1| = 2$ (рис. 24). **10.15.** 6) *Указание.* Данное уравнение равносиль-

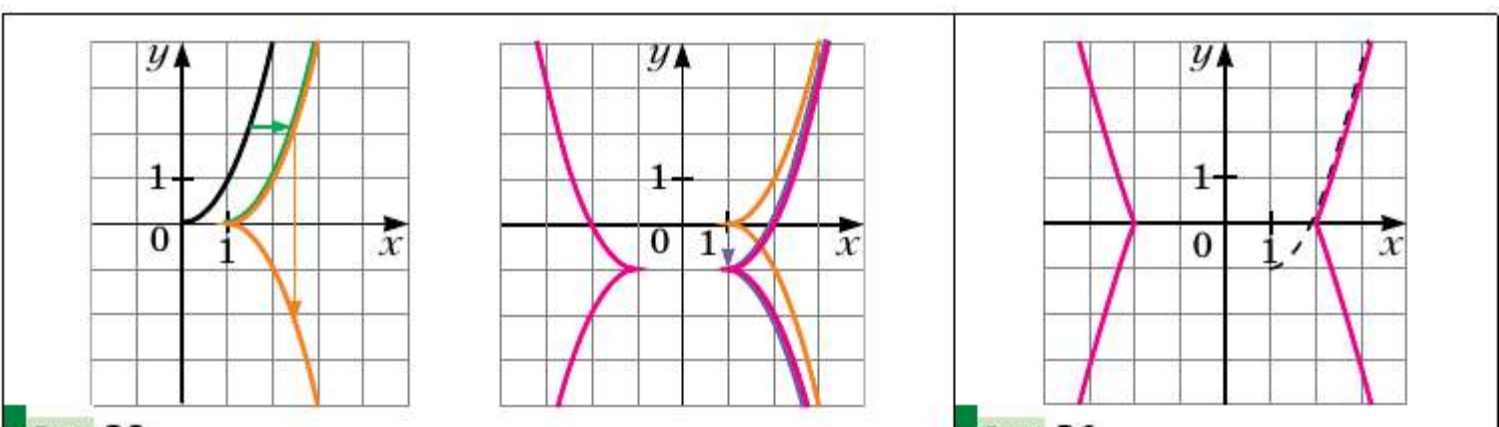


Рис. **20**

Рис. **21**

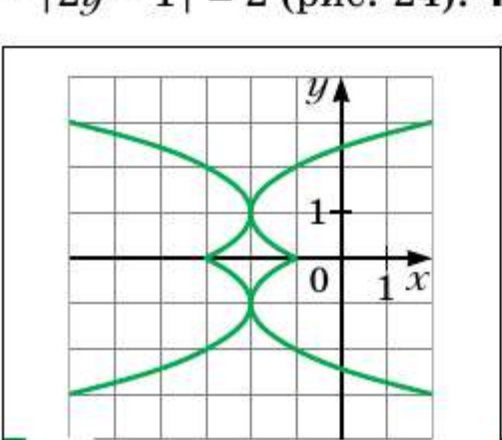


Рис. **22**

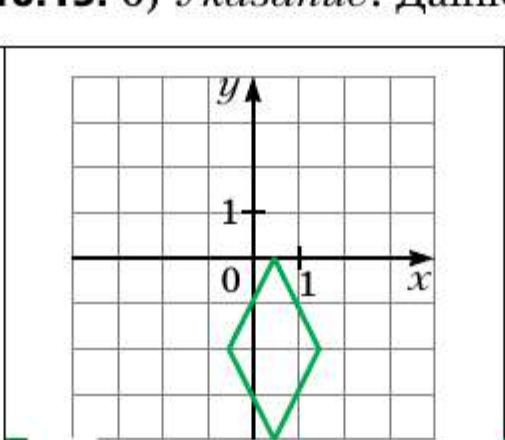


Рис. **23**

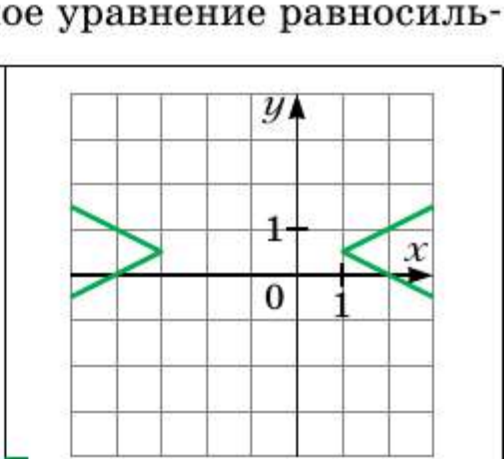


Рис. **24**

но системе $\begin{cases}(|x|-1)^2+y^2=1,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$ **10.16.** 6) *Указание*. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}x^2+(|y|-2)^2=4,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$ **10.19.** Если $|a|>1$, то один корень; если $|a|=1$ или $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то два корня; если $|a|<1$ и $|a|\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$, то три корня. *Указание*. Постройте в системе координат xa график данного уравнения (рис. 25). **10.20.** Если $a<-2$, то решений нет; если $a=-2$, то один корень; если $-2<a<0$, или $a=1$, или $a>2$, то два корня; если $a=0$ или $a=2$, то три корня; если $0<a<2$ и $a\neq 1$, то четыре корня. **10.21.** $\frac{1}{5}\leqslant a<\frac{1}{3}$ или $a=\frac{8}{15}$. *Указание*. Имеем: $ax=\sqrt{8x-x^2-15}+1$. График функции $y=ax$ — прямая, проходящая через начало координат. График функции $y=\sqrt{8x-x^2-15}+1$ — полуокружность окружности $(x-4)^2+(y-1)^2=1$, лежащая не ниже прямой $y=1$. Указанные графики должны иметь одну общую точку. Этому условию соответствуют касательная OM и любая прямая, проходящая через начало координат, угловой коэффициент которой не меньше углового коэффициента прямой OB и меньше углового коэффициента прямой OA (рис. 26). **10.22.** $-\frac{2}{5}\leqslant a<0$. **10.23.** График состоит из четырёх точек: (1; 1), (1; –1), (–1; 1), (–1; –1). *Указание*. Докажите, что $(x^4+1)(y^4+1)\geqslant 4x^2y^2$, и выясните условие достижения равенства. **10.24.** График состоит из одной точки (1; –2). **10.25.** График состоит из девяти точек: (1; 1), (0; 1), (–1; 1), (1; 0), (0; 0), (–1; 0), (1; –1), (0; –1), (–1; –1). *Указание*. Воспользуйтесь тем, что при $0\leqslant t\leqslant 1$ выполняется неравенство $\sqrt{t}\geqslant t$. **10.26.** Множество прямых вида $y=x+c$, где $c\in Z$. **10.27.** Все точки координатной плоскости, имеющие целые координаты. **10.28.** 3. *Указание*. Пусть $|x|+|y|=a$, где $a>0$. Надо найти наименьшее значение параметра a, при котором квадрат $|x|+|y|=a$ и окружность $x^2+(y-4)^2=1$ имеют общую точку (рис. 27).

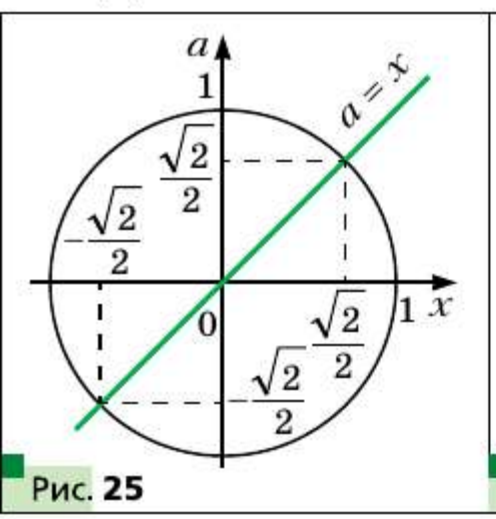


Рис. 25

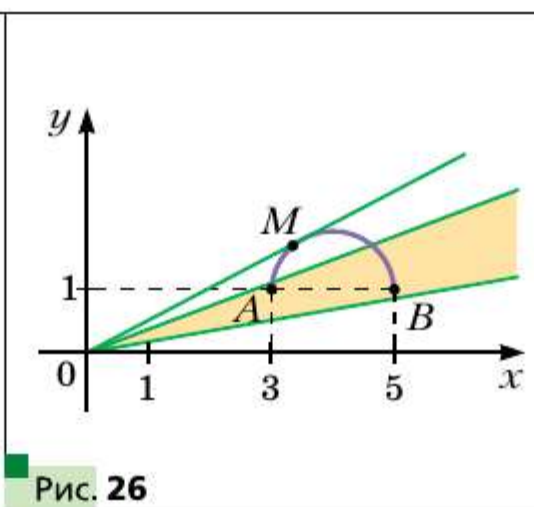


Рис. 26

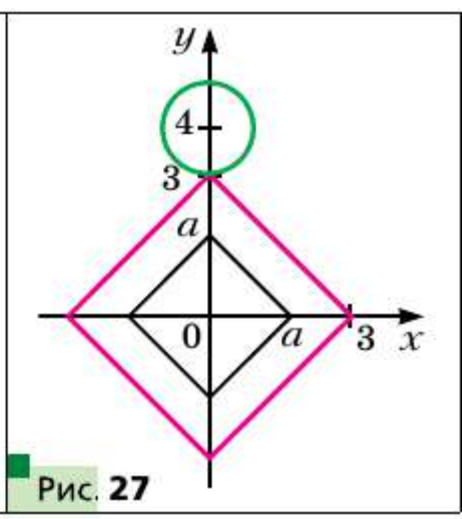


Рис. 27

10.29. 4. **10.30.** $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$. **10.31.** $x^2+2x-12=0$. **11.2.** 2) (0; 0), (1; 1); 3) (0; 4), (5; –1). **11.3.** 1) 2 решения; 2) 3 решения; 3) 1 решение; 4) 2 решения; 5) решений нет; 6) 3 решения; 7) 4 решения; 8) 2 решения; 9) 3 решения. **11.4.** 1) 3 решения; 2) решений нет; 3) 2 решения; 4) 4 решения; 5) 2 решения; 6) 2 решения. **11.5.** 1) Если $a>0$, то 2 решения; если $a=0$, то 1 решение; если $a<0$, то решений нет; 2) если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$, то решений нет; если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$, то 4 решения; если $1<a<\sqrt{2}$, то 8 решений. **11.6.** 1) Если $a<1$, то решений нет; если $a=1$, то 2 решения; если $a>1$, то 4 решения; 2) если $a>3\sqrt{2}$ или $a<-3$, то решений нет; если $a=3\sqrt{2}$ или $-3<a<3$, то 2 решения; если $3<a<3\sqrt{2}$, то 4 решения; если $a=3$, то 3 решения; если $a=-3$, то одно решение; 3) если $a<\frac{1}{2}$ или $a>1$, то решений нет; если $a=\frac{1}{2}$ или $a=1$, то 4 решения; если $\frac{1}{2}<a<1$, то 8 решений. **11.7.** $a\neq -1$ и $a\neq\frac{9}{4}$. **11.9.** $a=-\frac{2}{3}$. **11.10.** $a=-7$. **11.11.** $a=-2$, $b=-7$. *Указание.* Вторая система при любых значениях параметров a и b имеет единственное решение. Этим свойством должна обладать и первая система. Поэтому прямые $x+y=3$ и $x+3y=3$ пересекаются в точке, координаты которой являются решением каждой из систем. **11.12.** $b=3$. *Указание.* Если $a\neq -3$, то система имеет решения при любом b. Рассмотрите отдельно случай, когда $a=-3$. **11.13.** $a=\frac{5}{2}$. **11.14.** $a=1$. **11.15.** $c=-\frac{7}{3}$. **11.16.** $c=\frac{11}{3}$. **11.17.** $a\leqslant -3$ или $a\geqslant\frac{3}{4}$. **11.18.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением каждого из уравнений $F(x; y)=0$ и $G(x; y)=0$, то она также является решением уравнения $F(x; y)+G(x; y)=0$. **11.19.** *Указание.* $7^n\cdot 2^{3n}-3^{2n}=7^n\cdot 8^n-9^n=56^n-9^n$. **12.1.** 1) (6; 1), (–6; –2); 2) (5; 3), (–1,5; –10); 3) (2; –2); 4) (4; 3); 5) (0; 0), (–2,4; 4,8); 6) (2; 2,5), (–4,4; –2,3). **12.2.** 1) (–1; 4), (–0,5; 2,5); 2) (4; 2), (20; –14); 3) (6; 9), (–9; –6); 4) (1; 0), (–0,5; 0,75); 5) (2; 4), (3; 3); 6) (1; 1), $\left(\frac{17}{3};\frac{38}{3}\right)$. **12.3.** 1) (3; 4), (4; 6); 2) (5; 1); 3) (1; 3), $\left(\frac{3}{5};\frac{21}{5}\right)$. **12.4.** 1) (2; 1), $\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$; 2) (19; 8), $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$; 3) (–15; –5), (3; 4). **12.5.** 1) (1; 1), (1; –1); 2) (2; 1), (2; –1), $\left(-2;\sqrt{5}\right)$, $\left(-2;-\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(-3;\sqrt{7}\right)$, $\left(-3;-\sqrt{7}\right)$. **12.6.** 2) (1; 0), (0; 1), (–1; 2); 3) (2; 1), (–2; 1). **12.7.** 1) $\left(2;-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(2;\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2};0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};0\right)$, (–1; –3), $\left(\frac{3}{2};2\right)$; 3) (–4; 6), (–4; –6), $\left(\frac{4}{7};2\frac{4}{7}\right)$; 4) (–1; 4), (4; –1), (–5; 2), (2; –5).

12.8. 1) (2; 3), (0; 1), (1,5; 1); 2) (1; 1), $\left(1; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(1; \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)$, (0; 2), (–6; 2); 3) $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{2}\right)$; 4) (2; –1), (–1; 2), (–2; 1), (1; –2). **12.9.** 1) (3; 2), (–3; –2); 2) (3; 1), (–3; –1), $\left(12; -\frac{7}{2}\right)$, $\left(-12; \frac{7}{2}\right)$; 3) (–1; –1). *Указание.* Вычтите из первого уравнения системы второе уравнение; 4) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **12.10.** 1) (2; –1), (–1; t), где t — любое число; 2) (1; 1), (–1; –1), $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; 3) (2; 2); 4) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **12.11.** 1) (3; 1), (1; 2). *Указание.* Умножьте обе части второго уравнения системы на 3 и вычтите из первого; 2) (1; 1). *Указание.* Сложите уравнения системы и получите $(x+y)^3 = 8$; 3) (1; 1). *Указание.* Сложите уравнения системы; 4) (1; 0). **12.12.** 1) (–1; 1), (–2; 0); 2) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; 3) (–1; –1); 4) (–1; 0). **12.13.** 1) (–1; 1); 2) (–1; 1), $\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; 3) (1; 2), (–1; –2); 4) (3; –1), $\left(-6\frac{3}{8}; -4\frac{3}{4}\right)$. *Указание.* Разложите левые части каждого из уравнений на множители; 5) (2; 2), $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 6) (4; 2), (–4; –2). **12.14.** 1) (1; 2), (–1; –2), (1; –2), (–1; 2); 2) $\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 3) (2; –1), (–2; 1), (1; –2), (–1; 2); 4) (1; 1), (7; –2). *Указание.* Почленно разделите левые и правые части уравнений системы, предварительно преобразовав первое уравнение к виду $(x+3y)(x+1)=8$, а второе — к виду $(x+3y)(y-2)=-4$; 5) (1; 3), $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 6) (3; –1), $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. **12.15.** 1) (4; 2), (–4; –2). *Указание.* Перемножив уравнения системы, получим уравнение, линейное относительно xy; 2) (3; 1), $\left(-32; \frac{1}{8}\right)$. **12.16.** 1) (1; 2), (–1; 2); 2) (1; 1), (–1; –1), (1; –1), (–1; 1). **12.17.** (1; 0), (–1; 0). *Указание.* Перемножив соответственно левые и правые части уравнений системы, получим уравнение $x^8 = 1$, являющееся следствием данной системы. **12.18.** (1; 0). **12.19.** 1) (1; –2), (–2; 1), (–1; 2), (2; –1). *Указание.* Первое уравнение системы разложите на множители. 2) (1; 1), (–1; 1). *Указание.* Из первого уравнения системы выразите x^4 через y. Подставьте полученное выражение во второе уравнение системы. Покажите, что полученное уравнение имеет единственный корень, который удовлетворяет условию $y \geqslant \frac{1}{2}$. **12.20.** 2) (3; 1), (3; –1). **12.21.** (3; 1), $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. *Указание.* Умножьте пер-

вое уравнение системы на x, второе — на $-y$ и сложите полученные уравнения. **12.22.** (0; 2), (0; –2), (1; –3), (–1; 3). *Указание.* Из второго уравнения выразите y^2 через x^2. В первом уравнении запишите $y^3 = y^2 \cdot y$. **12.23.** Если $a \leqslant -2$, то $x \in (-\infty; a) \cup (-a; +\infty)$; если $-2 < a < 0$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; a) \cup (-a; +\infty)$; если $a = 0$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$; если $0 < a < 2$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -a) \cup (a; +\infty)$; если $a \geqslant 2$, то $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$. **13.1.** 1) (3; 2), (–3; –2); 2) $\left(\frac{11}{13}; -\frac{24}{5}\right)$; 3) (14; –11), (11; –14); 4) $\left(6\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{108}{125}; 11\frac{17}{125}\right)$. **13.2.** 1) (2; 3), (3; 2), (–2; –3), (–3; –2); 2) $\left(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{19}{8}; -\frac{13}{8}\right)$, (2; 1); 4) (–4; 0), $\left(-\frac{40}{41}; -\frac{32}{41}\right)$. **13.3.** 1) (6; 2), (–6; –2); 2) (3; 1), (–3; –1), $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$; 3) (9; 12), (–12; –9). *Указание.* Выполните замену $x - y = u$, $xy = v$; 4) $\left(8; \frac{8}{5}\right)$, $\left(-4; \frac{4}{7}\right)$. **13.4.** 1) (–1; 2), (–2; 1); 2) (2; 3), (–2; –3); 3) (11; 1); 4) (2; 1), (6; –3), $\left(6 + 2\sqrt{3}; -2 - 2\sqrt{3}\right)$, $\left(6 - 2\sqrt{3}; -2 + 2\sqrt{3}\right)$. **13.5.** 1) $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$. *Указание.* Выполните замену $\sqrt{9x^2 + 2y + 1} = t$; 2) (2; –2). **13.6.** (2; 3), $\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{27}\right)$. **13.7.** 1) (–2; 3), (12; 24). *Указание.* Выполните замену $\sqrt{4 - x + y} = u$, $\sqrt{9 - 2x + y} = v$; 2) (2; 3), (–2; –3), (–2; 3), (2; –3). **13.8.** 1) (–10; 26), (4; 5); 2) (2; 1), (–2; –1). **13.9.** 1) (3; 1), (–3; –1), $\left(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$; 2) (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2). **13.10.** 1) (0; 0), (2; 2), (0,5; –0,1); 2) $\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right)$, (–5; 2). **13.11.** 1) (1; 2), (–1; –2); 2) (4; 2), (–4; –2); 3) (1; 1), (–1; –1), $\left(-\frac{25}{3\sqrt{149}}; \frac{1}{\sqrt{149}}\right)$, $\left(\frac{25}{3\sqrt{149}}; -\frac{1}{\sqrt{149}}\right)$; 4) $\left(-\frac{8}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, (3; 4), (–3; –4). **13.12.** 1) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, (2; –1), (–2; 1); 2) (1; 2), (–1; –2); 3) (2; 1), (–2; –1); 4) (2; –1), (–2; 1), $\left(-\frac{5}{\sqrt{78}}; \frac{23}{\sqrt{78}}\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{78}}; -\frac{23}{\sqrt{78}}\right)$. **13.13.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (2; 1). **13.14.** 1) (2; 1), (–1; –2). **13.15.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (1; 1). **13.16.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (3; 4), (4; 3), $\left(-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}\right)$, $\left(-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\right)$. **13.17.** 1) (3; 4), (4; 3), $\left(11 + 2\sqrt{31}; 11 - 2\sqrt{31}\right)$, $\left(11 - 2\sqrt{31}; 11 + 2\sqrt{31}\right)$; 2) (4; 1), (1; 4). **13.18.** 1) (2; 2), $\left(-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2 + 2\sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}\right)$.

Указание. Раскройте скобки в первом уравнении системы; 2) (2; 1), (1; 2), (–2; 1), (1; –2); (0; –3), (–3, 0). **13.19.** 1) (4; 1), (1; 4), $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}; \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; 2) (6; 6), $\left(\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}; -\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}\right)$, $\left(-\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}; \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$; 3) $\left(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right)$, $\left(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right)$; 4) (–2; 3), (3; –2). **13.20.** 1) (4; 8), (8; 4); 2) (1; 1), (1; –2), (–2; 1). **13.21.** 1) (2; 1), (1; 2), (–2; –1), (–1; –2), (0; 2), (2; 0), (0; –2), (–2; 0); 2) (2; –1), (–1; 2), (–2; 1), (1; –2). **13.22.** 1) (1; 3), (3; 1), (–1; –3), (–3; –1); 2) (–3; –2), (–2; –3), (2; 3), (3; 2). **13.23.** 1) (5; 3), (5; –3), $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$. *Указание.* Перепишем первое уравнение системы так: $x^2 - y^2 + (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 20$. Пусть $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = t$. Тогда $t^2 + t - 20 = 0$. Отсюда $t = -5$ или $t = 4$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = -5, \\ (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\sqrt{(x+y)(x-y)} = -5, \\ x+y < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{(x+y)(x-y)} = 4, \\ x+y > 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

2) (–1; –1), (–1; 3), (2; –1), (2; 3). *Указание.* Выполните замену $x^2 - x = u$, $y^2 - 2y = v$; 3) (1; 1). *Указание.* Разделите обе части второго уравнения системы на xy. **13.24.** 1) (5; 4), (5; –4), $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, (1; 3), $\left(-\frac{5+\sqrt{11}}{4}; 2+\sqrt{11}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{11}-5}{4}; 2-\sqrt{11}\right)$. **13.25.** 1) $\left(\sqrt{6}; -2\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; 2\sqrt{6}\right)$. *Указание.* Рассмотрите первое уравнение системы как квадратное относительно x и докажите, что $y^2 \geqslant 24$; 2) (1; –1). *Указание.* Рассмотрев каждое уравнение системы как квадратное относительно x, можно показать, что y удовлетворяет условию $\begin{cases} y^4 \leqslant 1, \\ y^3 \leqslant -1; \end{cases}$ 3) (2; 2); 4) $\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. **13.26.** 1) (–2; –1); 2) (2; –1). **13.27.** 1) (2; 1), (2; –1). *Указание.* Запишите первое уравнение системы так: $y^2 = (x-2)^2 + 1$. Тогда понятно, что $y^2 \geqslant 1$; 2) (8; –1). *Указание.* Из первого уравнения системы следует, что $x - y \leqslant 9$, а из второго уравнения $x - y \geqslant 9$. **13.28.** 1) (2; 3), (–2; 3); 2) (3; 2). **13.29.** $a = -2$. *Указание.* Если пара $(x_0; y_0)$ является решением системы, то пара $(y_0; x_0)$ также является её решением. **13.30.** $a = -1$ или $a = \frac{4}{3}$. **13.31.** $a = 2$. **13.32.** 1) (0; 1), (1; 0). *Указание.* Из первого уравнения системы следует, что $|x| \leqslant 1$,

$|y| \leqslant 1$. Тогда $x^5 \leqslant x^2$, $y^5 \leqslant y^2$, отсюда $x^5 + y^5 \leqslant x^2 + y^2 = 1$; 2) (0; 0), (1; 1). *Указание*. Вычтем из первого уравнения системы второе, получим $(y^3 - y^2 + y) - (x^3 - x^2 + x) = x^2 - y^2$. Отсюда $x^3 + x = y^3 + y$. Далее воспользуйтесь тем, что функция $f(t) = t^3 + t$ является возрастающей; 3) (0; 0), (1; 1), (–1; –1). *Указание*. I способ. Следует заметить, что все решения системы удовлетворяют условию $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$ (см. пример 2 в § 1). Ясно, что пара (0; 0) — решение системы. Далее, перемножив уравнения системы, получим $\dfrac{4xy}{(1+x^2)(1+y^2)} = xy$. При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ имеем $\dfrac{4}{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Последнее равенство возможно только при условии $\begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$ II способ. Рассмотрите функцию $f(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Докажите, что она возрастает на промежутке [–1; 1]. Данная система принимает вид $\begin{cases} f(x) = y, \\ f(y) = x. \end{cases}$ Отсюда $f(f(x)) = x$. Так как функция f возрастает на промежутке [–1; 1], то по теореме 2.6 имеем $f(x) = x$. **13.33.** 1) (0; 1), (1; 0). *Указание*. Докажите, что $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; 2) (0; 0), (3; 3), (–3; –3); 3) (0; 0), (1; 1). **13.34.** При $a < 0$ или $a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **14.1.** 60 км/ч, 30 км/ч. **14.2.** 80 км/ч, 60 км/ч или 120 км/ч, 80 км/ч. **14.3.** 2 км/ч. **14.4.** 27 км/ч, 3 км/ч. **14.5.** Не более 15 машин. **14.6.** Не более 6 промахов. **14.7.** 24 ч. **14.8.** 24 км/ч, 16 км/ч. **14.9.** 12 км/ч, 18 км/ч. **14.10.** 60 км/ч. **14.11** 7 кг, 21 кг. **14.12.** 1,2 кг, 2,4 кг. **14.13.** 2 км/ч, 12 км/ч. **14.14.** 12 ч, 9 ч. **14.15.** 12 дней, 24 дня или 40 дней, 10 дней. **14.16.** 10 ч, 15 ч. **14.17.** Через 1 ч 30 мин. **14.18.** 150 м × 150 м. **14.19.** 500 м. **14.20.** 1 м/с. **14.21.** 30 км/ч. **14.22.** 48 мин. **14.23.** 4 ч. **14.24.** 10 лип и 4 берёзы или 11 лип и 5 берёз. **14.25.** 6 машин и 11 машин. **14.26.** 4 км/ч, 3 км/ч. **14.27.** 12 деталей. **14.28.** 5 деталей. **14.29.** По 2 цеха каждого типа. **14.30.** [–1; 0). **14.31.** При $a > 8$ — два решения; при $a = 8$ — бесконечно много решений; при $a < 8$ — нет решений.

Глава 3. **15.1.** $2x + 3y \geqslant -1$. **15.2.** $3x - y > 2$. **15.11.** 5) Рисунок 28, *а*; 6) рисунок 28, *б*; 10) рисунок 28, *в*. **15.12.** 4) Рисунок 29, *а*; 5) рисунок 29, *б*; 6) рисунок 29, *в*. **15.13.** 1) Графиком является объединение полуплоскости и прямой (рис. 30); 2) графиком является открытая полуплоскость, из которой «вырезан» луч (рис. 31). **15.15.** $3 \leqslant a \leqslant 5$. *Указание*. В системе координат xa графиком данного неравенства является ромб, изображённый на рисунке 32. **15.16.** $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 12$. **15.17.** $-\sqrt{6} < a < 0$, или $0 < a < 1$, или $1 < a < \sqrt{12}$. *Указание*. Запишите данное неравенство так: $(x - a^2)(x - a - 4) \leqslant 0$. На рисунке 33 изображён

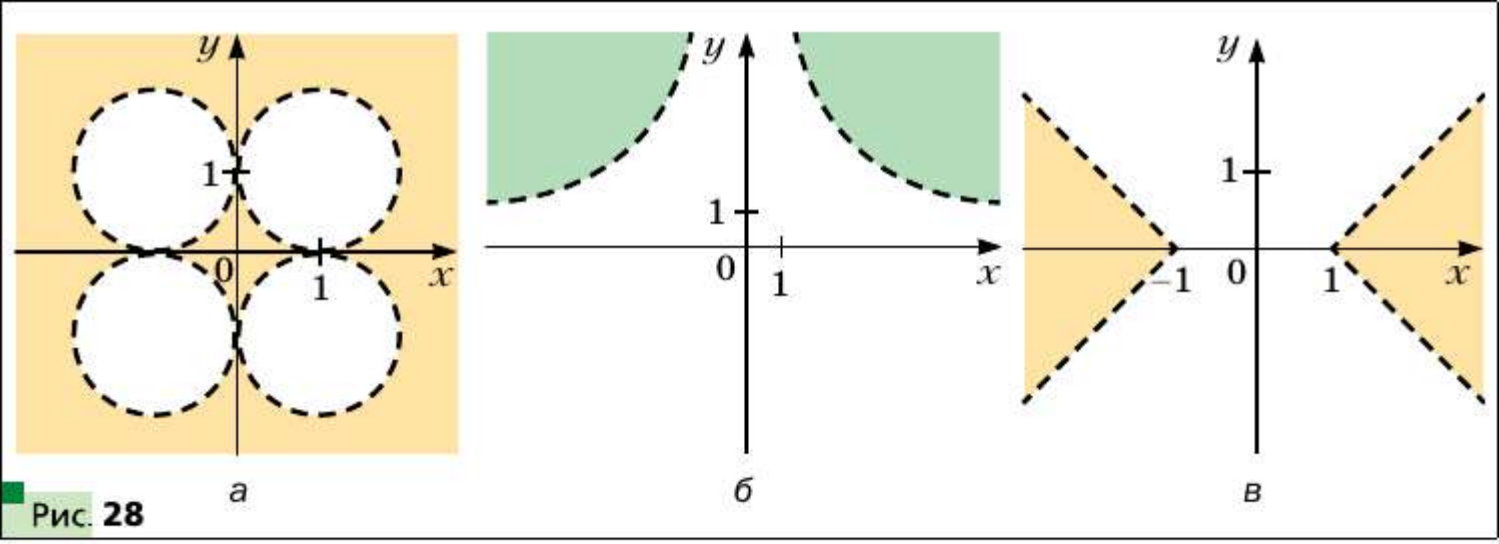


Рис. **28**

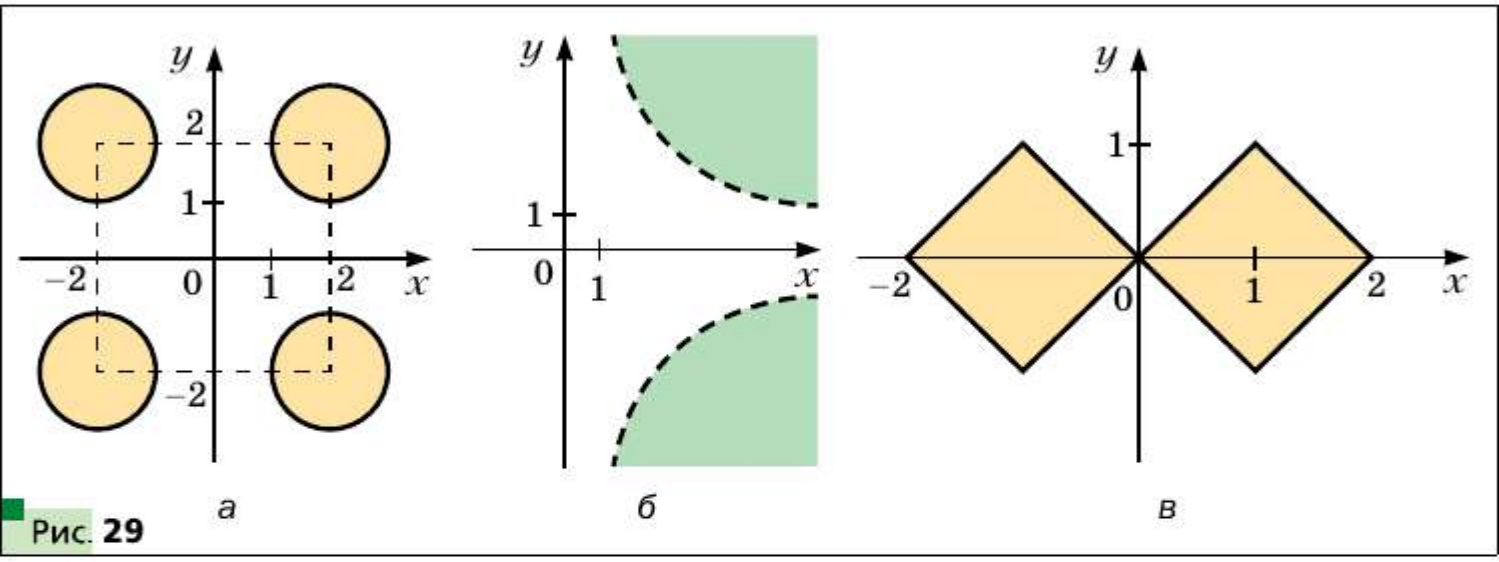


Рис. **29**

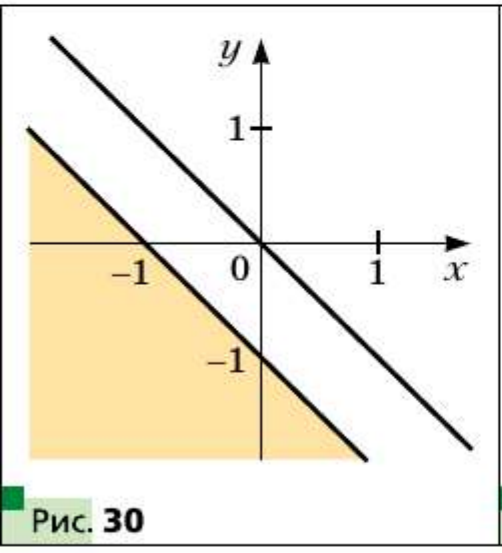


Рис. **30**

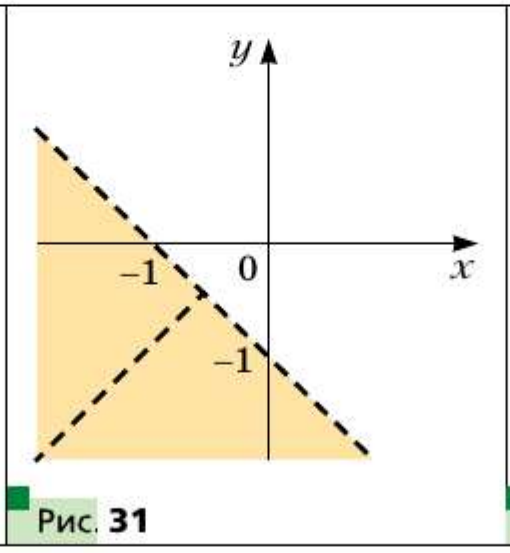


Рис. **31**

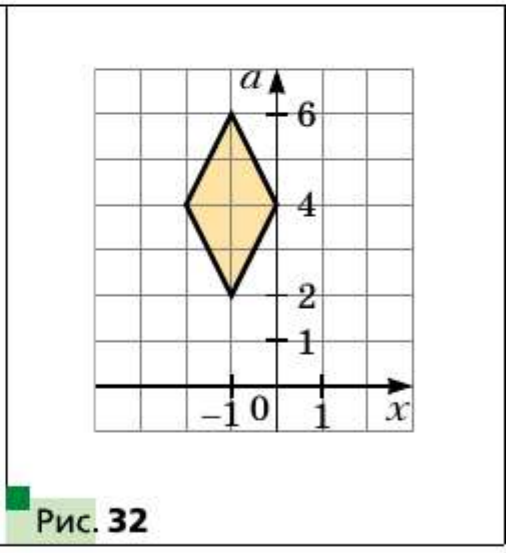


Рис. **32**

график этого неравенства в системе координат ax. Проведём горизонтальные прямые $x = k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Надо найти те значения параметра a, при которых вертикальные прямые пересекают в закрашенных областях не более четырёх прямых вида $x = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **15.18.** *Указание.* $11 \cdot 3^{2n} + 10 \cdot 2^n = 11 \cdot 9^n + 10 \cdot 2^n = 11 \cdot 9^n - 11 \cdot 2^n + 21 \cdot 2^n$. **16.10.** 4) Рису-

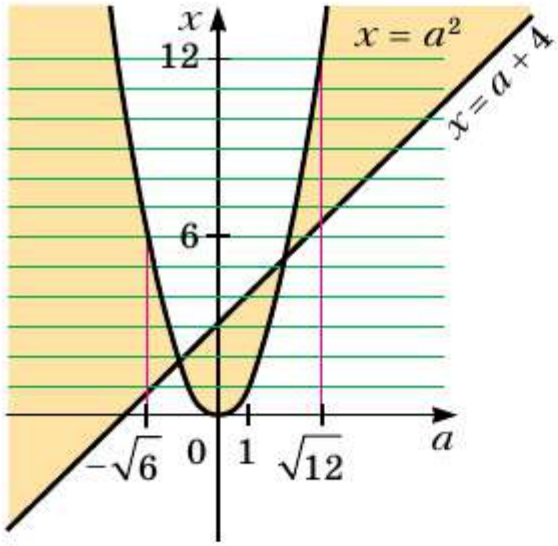


Рис. **33**

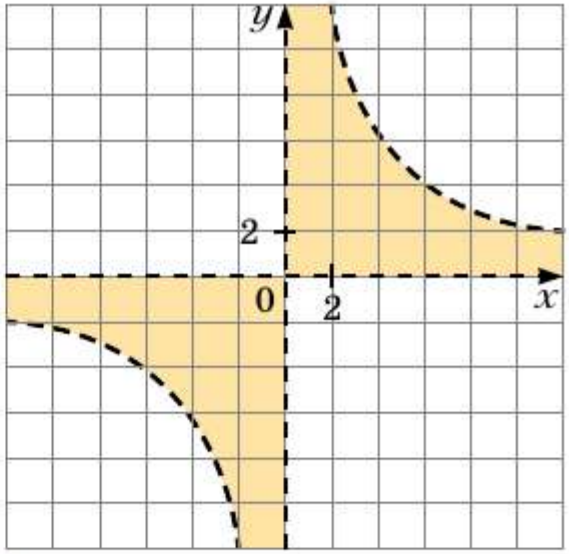


Рис. **34**

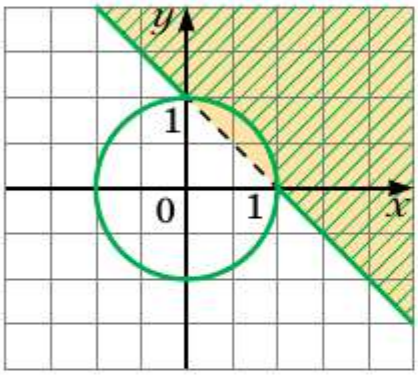


Рис. **35**

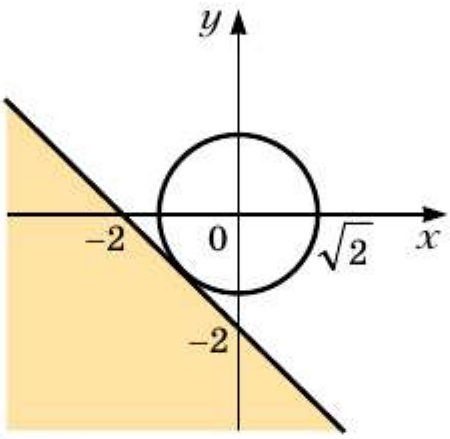


Рис. **36**

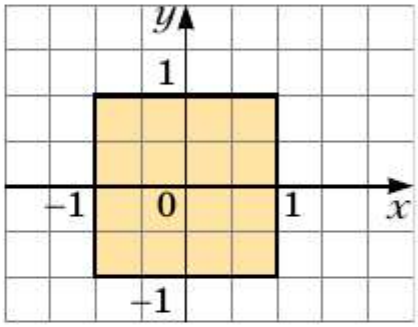


Рис. **37**

нок 34. **16.12.** 2) Рисунок 35. **16.13.** 3) Графиком является объединение полуплоскости и окружности (рис. 36). **16.14.** Рисунок 37. *Указание*. Если пара $(x_0; y_0)$ является решением неравенства, то пары $(-x_0; y_0)$, $(x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ также являются решениями неравенства. Поэтому достаточно построить график неравенства $x + y + |x - y| \leqslant 2$ при условии $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, а потом применить преобразование симметрии относительно осей координат. **16.15.** Рисунок 38. **16.18.** 1) *Указание*. Данное условие определяется совокупностью двух систем: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ 2x = x^2 + y^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x < 1, \\ 1 = x^2 + y^2. \end{cases}$ Искомый график — объединение дуг двух окружностей (рис. 39). **16.19.** 1) Рисунок 40. **16.20.** $a = -3$ или $a = 1$. *Указание*. На координатной плоскости xa постройте изображение множества решений системы. **16.21.** $a = 0$ или $a = 4$. **16.22.** $-2 < a < 0$. *Указание*. Разложите на множители левую часть неравенства системы. Постройте изображение множества решений системы на координатной плоскости xa. **16.23.** $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}$ или $0 < a < \sqrt{2}$.

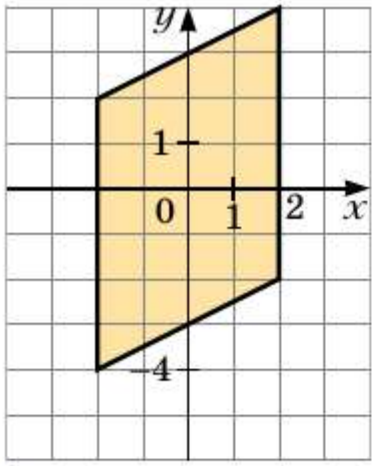


Рис. 38

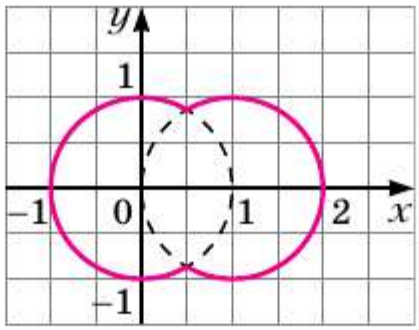


Рис. 39

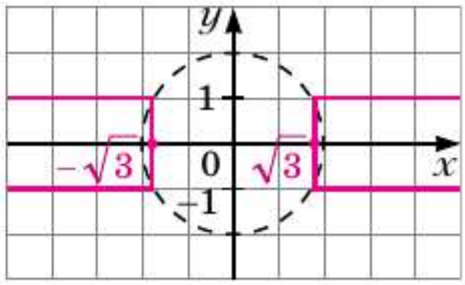


Рис. 40

16.24. $-\frac{9}{4} < a < 2$. *Указание.* См. пример 3 в § 15. **16.25.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant 4$; 2) $a = -4$ или $a = 4$; 3) $-4 \leqslant a < -3$; 4) $2 < a \leqslant 4$; 5) $a \leqslant -3{,}5$ или $a \geqslant 0{,}5$; 6) $-4 \leqslant a < -3{,}5$ или $2 < a \leqslant 4$. *Указание.* Воспользуйтесь графиком данной системы, изображённым на рисунке 41. **16.26.** $(3; 4) \cup (4; +\infty)$. **16.27.** $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{12}$. **17.10.** 1) *Указание.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. **17.16.** *Указание.* Рассмотрите сумму данных выражений. **17.17.** 1) *Указание.* Воспользуйтесь методом разности. **17.19.** *Указание.* Воспользуйтесь методом разности. **17.23.** *Указание.* Воспользуйтесь методом разности. **17.24.** *Указание.* Воспользуйтесь методом разности. **17.25.** *Указание.* Воспользуйтесь методом разности. **17.26.** *Указание.* Левую часть неравенства можно записать так: $(a^8 - 2a^4 + 1) + (a^6 - 2a^4 + a^2)$. **17.28.** *Указание.* Воспользуйтесь методом доказательства от противного. **17.29.** *Указание.* Воспользуйтесь методом доказательства от противного. **17.31.** *Указание.* Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то $\frac{x}{1+y} \leqslant \frac{x}{x+y}$ и $\frac{y}{1+x} \leqslant \frac{y}{y+x}$. **17.34.** *Указание.* Воспользуйтесь ключевой задачей 17.15 (1). **17.37.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $1 + x^2 \geqslant 2x$. **17.38.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $x^4 + 4 \geqslant 4x^2$ и $4y^4 + 1 \geqslant 4y^2$. **17.39.** *Указание.* Докажите, что $4y^3 + y \geqslant 4y^2$ при $y \geqslant 0$. **17.42.** *Указание.* Примените неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ для $x = 2a$, $y = b$, $z = 1$. **17.48.** *Указание.* Запишите доказываемое неравенство в виде $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$. **17.49.** *Указание.* Пусть доказываемое утверждение ложно. Тогда верны неравенства $a - b^2 - \frac{1}{4} > 0$, $b - c^2 - \frac{1}{4} > 0$, $c - a^2 - \frac{1}{4} > 0$. Сло-

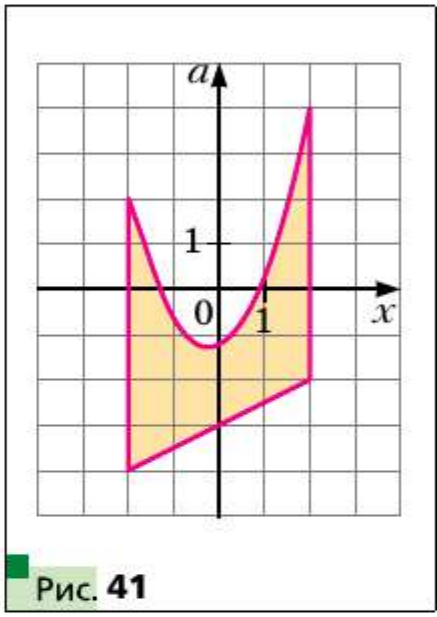


Рис. 41

жите почленно эти неравенства и получите противоречие. **17.50.** *Указание.* Заметим, что если верно одно из неравенств $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$, то доказываемое утверждение очевидно. Пусть $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$ и верны неравенства $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$, $c(1-a) > \frac{1}{4}$. Отсюда $a(1-a)\,b(1-b)\,c(1-c) > \frac{1}{64}$. Докажите, что при $0 < x < 1$ выполняется неравенство $0 < x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$. **17.51.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что при $a > 0$ и $b > 0$ выполняется неравенство $\frac{1}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{2ab}$. **17.52.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $2ab \leqslant a^2 + b^2$. **17.54.** *Указание.* Докажите, что $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$. **17.56.** *Указание.* Так как при данном условии $x^2 \leqslant x$ и $y^2 \leqslant y$, то достаточно доказать неравенство $(x+y+1)^2 \geqslant 4(x+y)$. **17.57.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1}$, где $n \in N$, $k \in N$. **17.58.** *Указание.* С учётом условия преобразуем левую часть неравенства: $\frac{xy^2}{x^3+2xyz} + \frac{yz^2}{y^3+2xyz} + \frac{zx^2}{z^3+2xyz}$. Далее см. решение задачи 17.52. **17.59.** *Указание.* $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = \left(a^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(b^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(c^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(d^2+\frac{1}{4}e^2\right)$. **17.60.** *Указание.* $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$. Далее см. пример 3 в § 16. **17.61.** *Указание.* Пусть $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Имеем: $A < B$. Отсюда $A^2 < AB = \frac{1}{2n+1}$. **17.62.** *Указание.* Пусть $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$. Имеем: $A > C$, $A^2 > AC = \frac{1}{4n}$. **17.63.** *Указание.* Пусть $S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}$, $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}$. Очевидно, что $S > S_1$. Тогда $2S > S + S_1$. **17.65.** 1; -1; $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$. **17.66.** $a = 2$. **18.8.** *Указание.* $a^2+4 = (a^2+3)+1$. **18.10.** *Указание.* $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. **18.15.** *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам $(a; -b)$ и $(c; d)$. **18.21.** 12. **18.22.** 20. **18.23.** 3. **18.24.** 12. **18.26.** 18. **18.27.** $\frac{1}{6}$. **18.28.** $\frac{1}{7}$. **18.34.** *Указание.* $\sqrt{(1-a)(1-b)} \leqslant \frac{1-a+1-b}{2}$. **18.36.** *Указание.* I способ. Воспользуйтесь тем, что $x^2+y^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2}$. II способ. Примени-

те неравенство Коши — Буняковского к наборам (1; 1) и $(a; b)$. **18.39.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что среднее гармоническое чисел a и b не больше, чем их среднее арифметическое. **18.40.** *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам $\left(a; \sqrt{1-a^2}\right)$ и $\left(\sqrt{1-b^2}; b\right)$. **18.41.** *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам (1; 1; 1) и $(x; y; z)$. **18.44.** 5, –5. *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам (3; 4) и $(x; y)$. **18.45.** 1. **18.46.** *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам $(a^2; b^2; c^2)$ и $\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$. **18.49.** *Указание.* $(a+c)(b+d) = ab + ad + cb + cd = (ad + bc) + (cd + ba)$. **18.50.** *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам $\left(\sqrt{3a+1}; \sqrt{3b+1}; \sqrt{3c+1}\right)$ и (1; 1; 1). **18.52.** 3. *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам $\left(\sqrt{x-2}; \sqrt{4-x}\right)$ и (1; 1). **18.53.** 0. **18.54** 5. *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам (2; x) и $\left(\sqrt{x-1}; 5\right)$. Далее воспользуйтесь условием достижения равенства в неравенстве Коши — Буняковского. **18.55.** *Указание.* Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам $(x; y; z)$ и (3; –1; 1). **18.56.** *Указание.* $|2x + y - z| \leqslant \sqrt{x^2 + 3y^2 + z^2} \cdot \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}$.

18.57. *Указание.* I способ. $\sqrt{b-1} = \sqrt{(b-1)\cdot 1} \leqslant \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}$. II способ. $\frac{a}{\sqrt{b-1}} + \frac{b}{\sqrt{a-1}} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a-1}} \cdot \frac{b}{\sqrt{b-1}}} \geqslant 4$. **18.58.** *Указание.* Имеем: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Также, сравнивая среднее квадратичное и среднее арифметическое чисел $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, можно записать $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. **18.59.** *Указание.* $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{a}\right)^2 \geqslant \frac{\left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{a}\right)^2}{2}$. Далее воспользуйтесь тем, что из условия $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$ следует неравенство $ab \leqslant \frac{1}{4}$. **18.60.** *Указание.* $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} \geqslant \sqrt{2} \cdot \frac{a+1}{2}$. **18.61.** *Указание.* Имеем:

$$\sqrt{(1-a-b)^2 + c^2 + c^2} + \sqrt{(1-b-c)^2 + a^2 + a^2} + \sqrt{(1-c-a)^2 + b^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{(1-a-b)^2 + c^2 + c^2}{3}} + \sqrt{\frac{(1-b-c)^2 + a^2 + a^2}{3}} + \sqrt{\frac{(1-c-a)^2 + b^2 + b^2}{3}}\right).$$

Далее сравните среднее квадратичное трёх чисел с их средним арифмети-

ческим. **18.62.** *Указание.* Пусть сторона квадрата равна 1. Воспользуемся обозначениями, показанными на рисунке 42. Осталось доказать неравенство $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-z)^2}+$ $+\sqrt{z^2+(1-t)^2}+\sqrt{t^2+(1-x)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$. Далее см. пример 1 в § 19. **18.63.** *Указание.* $1+a=2-b-c=(1-b)+(1-c)\geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. **18.64.** *Указание.* I способ. Примените неравенство Коши — Буняковского к наборам $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}};\frac{y}{\sqrt{x+z}};\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ и $\left(\sqrt{y+z};\sqrt{x+z};\sqrt{x+y}\right)$.

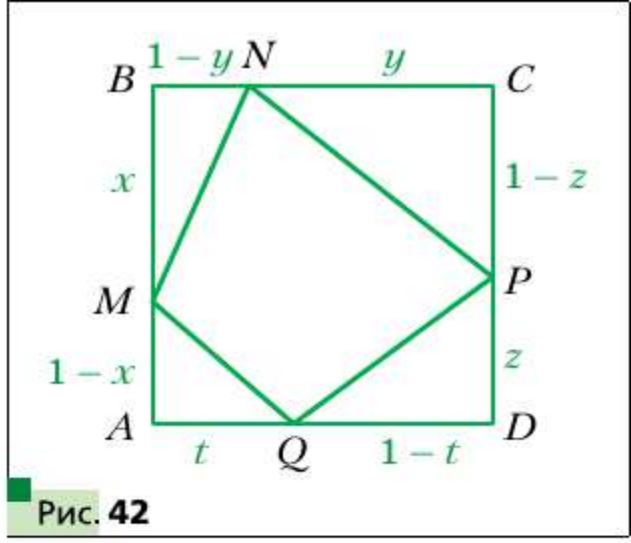


Рис. 42

II способ. В силу неравенства Коши $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geqslant x$ и т. д. **18.65.** *Указание.* Так как при $a>0$ и $b>0$ верно неравенство $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\frac{a+b}{2}$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$. **18.66.** *Указание.* $\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1}\geqslant\frac{\frac{2a}{b+c}\cdot 1}{\frac{a}{b+c}+1}=\frac{2a}{a+b+c}$.

18.67. $a<0$ или $a=1{,}5$. **18.68.** Достаточно показать, что при любом натуральном n НОД $(30n+2;\ 12n+1)=1$. Для доказательства этого воспользуйтесь теоремой: для любых натуральных чисел a и b таких, что $a>b$, НОД $(a;\ b)=$ НОД $(a-b;\ b)$.

Глава 4. **19.8.** 1) Если $a=6$, то один корень; если $a>6$, то 2 корня; если $a<6$, то корней нет; 2) если $a=1$ или $a=-8$, то один корень; если $a<-8$ или $a>1$, то 2 корня; если $-8<a<1$, то корней нет. **19.9.** Если $a=0$, или $a=3$, или $a=-3$, то один корень; если $a<-3$ или $0<a<3$, то 2 корня; если $-3<a<0$ или $a>3$, то корней нет. **19.10.** Да. Например, $f(x)=x^{10}$. **19.11.** Да. Например, $f(x)=x^5$. **19.18.** 4) $\min\limits_{(-\infty;\,-2]}f(x)=256$, наибольшего значения не существует; 5) $\min\limits_{(-2;\,1)}f(x)=0$, наибольшего значения не существует. **19.20.** 1) Чётным; 2) нечётным; 3) нечётным; 4) определить невозможно; 5) чётным; 6) определить невозможно. **19.21.** 1) 1; 2) -1; 1. *Указание.* Рассмотрите функцию $f(x)=2x^4+x^{10}$. Она является чётной. Поэтому достаточно найти неотрицательные корни данного уравнения. На промежутке $[0;\ +\infty)$ функция f является возрастающей, следовательно, уравнение $f(x)=3$ на этом промежутке имеет не более одного корня. **19.22.** 1) -1; 2) -1; 1. **19.23.** Если $-1<a\leqslant 0$, то $\min\limits_{[-1;\,a]}f(x)=f(a)=a^8$,

$\max\limits_{[-1;a]} f(x) = f(-1) = 1$; если $0 < a \leqslant 1$, то $\min\limits_{[-1;a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;a]} f(x) = f(-1) = 1$; если $a > 1$, то $\min\limits_{[-1;a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;a]} f(x) = f(a) = a^8$. **19.24.** Если $a < -2$, то $\min\limits_{[a;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[a;2]} f(x) = f(a) = a^6$; если $-2 \leqslant a \leqslant 0$, то $\min\limits_{[a;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[a;2]} f(x) = f(2) = 64$; если $0 < a < 2$, то $\min\limits_{[a;2]} f(x) = f(a) = a^6$, $\max\limits_{[a;2]} f(x) = f(2) = 64$. **19.25.** 1. *Указание*. Перепишите уравнение в виде $\frac{2}{x^{17}} + \frac{3}{x^9} = 5$ и выполните замену $\frac{1}{x} = t$. **19.26.** -1. **19.28.** 5. **20.6.** 3) $y = \frac{1-x}{2x}$. **20.7.** 1) $y = 5(x-3)$. **21.1.** 7) 3; 8) 2. **21.2.** 4) 7. **21.5.** 1) 29; 2) 56. **21.6.** 1) $-11{,}8$; 2) $58\frac{1}{3}$. **21.7.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; 4) $[3; +\infty) \cup \{0\}$. **21.8.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; 3) $[-3; 3]$; 4) $[6; +\infty) \cup \{0\}$. **21.14.** 1) $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$; 2) $[-6; 3)$. **21.15.** 1) $(-\infty; -6) \cup [-4; 4] \cup (6; +\infty)$; 2) $(-4; -3] \cup [3; +\infty)$. **21.16.** 1) -1; 2; 2) -1; 3. **21.17.** 1) -3; 2; 2) -3; 1. **21.21.** 3) $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = \sqrt[3]{2}$, $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = 0$; 5) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{[-1;+\infty)} f(x) = 0$; 6) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{(-\infty;2)} f(x) = 0$. **21.22.** 1) *Указание*. Из предположения $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, имеем равенство $2n^3 = m^3$. Отсюда $m \vdots 2$, т. е. $m = 2m_1$, $m_1 \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $n^3 = 4m_1^3$. Следовательно, $m \vdots 2$. Получили противоречие с тем, что $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. **21.24.** 1) Если $a \leqslant -1$, то один корень; если $a > -1$, то 2 корня; 2) если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то один корень; 3) если $a < 0$ или $a = 1$, то один корень; если $0 \leqslant a < 1$ или $a > 1$, то 2 корня. **21.25.** 1) Если $a \geqslant -1$, то один корень; если $a < -1$, то 2 корня; 2) если $a < 0$ или $a = 1$, то один корень; если $a \geqslant 0$ и $a \neq 1$, то 2 корня. **21.26.** 1) Один корень при любом значении a; 2) если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то один корень. **22.13.** 1) 0; 2) $3\sqrt[3]{7m}$. **22.14.** 1) $27\sqrt[3]{2}$; 2) $29\sqrt[4]{a}$. **22.15.** 4) $\sqrt[30]{b^7}$; 5) $\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt[12]{128}$. **22.16.** 5) $\sqrt[6]{x^5}$; 6) $\sqrt[3]{a}$. **22.23.** 1) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 2) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) a и b — произвольные числа; 4) a и b — произвольные числа. **22.24.** 2) $[3; 7]$;

3) R. **22.25.** 2) $-n$; 4) c^4; 7) $-0{,}1a^3b^5$. **22.26.** 3) $10x$; 7) $-a^{18}b^{11}c^{11}$. **22.27.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$; 3) $|x|\cdot y\sqrt[6]{y}$; 4) $2m^4n^4\sqrt[4]{2m^2n}$; 5) $-3ab^2c^3\sqrt[4]{2}$; 6) $a^3b^3\sqrt[4]{a^3b^3}$; 7) $-a^3b^6\sqrt[8]{-ab^2}$. **22.28.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$; 3) $ab\sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$. **22.29.** 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $-\sqrt[6]{6a^3b^4}$; 3) $\sqrt[4]{mn}$; 4) $\sqrt[6]{6b^6}$, если $b\geqslant 0$, $-\sqrt[6]{6b^6}$, если $b<0$; 5) $-\sqrt[6]{-a^7}$; 6) $-\sqrt[4]{a^5b^6}$. **22.30.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $\sqrt[4]{6a^4b^4}$; 4) $-\sqrt[8]{3a^4b^8}$; 5) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **22.32.** 1) $ab\geqslant 0$; 2) $b=0$, a — любое число или $b>0$, $a\geqslant 0$; 3) $b=0$, a — любое число или $b>0$, $a\leqslant 0$. **22.33.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **22.35.** 1) 1; 2) 2; 3) $-\sqrt[3]{3}$. **22.36.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **22.39.** 1) $\dfrac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[6]{x}$; 3) $-\sqrt[4]{a}$; 4) $\sqrt[6]{a}$; 5) $\sqrt[6]{a^2-1}$. **22.43.** $\dfrac{1}{\sqrt[32]{2}-1}$. **22.44.** Если $a\neq 1$, то 2^6; если $a\neq 1$, то $\dfrac{a-1}{\sqrt[64]{a}-1}$. **22.45.** $x^3-9x-12$. *Указание.* Возведите обе части равенства $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ в куб. **22.46.** $(x-3)^3-2$. **22.47.** 1) *Указание.* Если $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}=x$, где $x\in Q$, то $x^3=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)^3$, $x^3=7+3\cdot\sqrt[3]{10}x$. Поскольку $x\neq 0$, то имеем, что $\sqrt[3]{10}=\dfrac{x^3-7}{3x}\in Q$; 2) *Указание.* Если $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}=x$, где $x\in Q$, то $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=\left(x-\sqrt{2}\right)^3$; $3=x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}$; $\sqrt{2}=\dfrac{x^3+6x-3}{3x^2+2}\in Q$. **22.49.** *Указание.* Используя метод математической индукции, докажите равенство $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{n\text{ радикалов}}=\sqrt[2^n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[2^n]{2-\sqrt{3}}$. **22.52.** 2. **23.5.** 2) $\dfrac{3}{4}$; 4) $\dfrac{5}{3}$; 6) $\dfrac{1}{2}$. **23.6.** 4) 4. **23.7.** 3) 10; 6) 4. **23.8.** 2) 49; 5) 32. **23.9.** 4) $(\sqrt[8]{a})^8$. **23.17.** 2) $a^{0,5}-2b^{0,5}$; 6) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 9) $3^{\frac{1}{5}}$. **23.18.** 3) $1+\dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$; 6) $x^{2,5}y^{2,5}\cdot\dfrac{x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}+y^{0,5}}$; 9) $2^{\frac{1}{2}}$. **23.19.** 1) $[2;+\infty)$; 2) $(2;+\infty)$. **23.21.** 1) 6; 2) 100; 3) $12\dfrac{4}{9}$; 4) 2; 5) 10; 6) $\dfrac{2}{15}$; 7) 3; 8) $\dfrac{25}{21}$. **23.22.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\dfrac{7}{9}$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 5) 21; 6) $\dfrac{225}{256}$. **23.23.** 1) 125; 2) 6; 3) корней нет. **23.24.** 1) $\dfrac{1}{9}$; 3) 5. **23.25.** 1) $\dfrac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; 2) $\dfrac{2(a+b)}{a-b}$; 3) $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{13}{12}}}$; 4) a^2+ab+b^2. **23.26.** 1) $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$; 2) 3; 3) $-\dfrac{a}{b}$; 4) $m^{-\frac{1}{2}}$. **23.29.** 1) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$; 2) -1. **23.30.** 1) $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$; 2) 0. **23.32.** 24, если $a=1$; $\dfrac{a^{7,4}-a^{0,2}}{a^{0,3}-1}$, если

$a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$. **23.33.** $\dfrac{b^{12,8} + b^{3,3}}{b^{0,1} + 1}$. **23.34.** Не существуют. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что значение выражения $5^n + 1$ не кратно 4.

Глава 5. **24.5.** 8 членов. **24.6.** 13. **24.7.** 1; 2; 3; 4; 5. **24.8.** 8. **24.9.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$; 5) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$; 6) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{n}$. **24.10.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; 4) $a_n = n^{(-1)^n}$; 5) $a_n = n - |n - 3|$. **24.11.** 1. **24.12.** 1) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 2$; 2) $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{3 - a_n}$; 3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(\sqrt{a_n} + 1\right)^2$. **24.13.** 3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$. **24.14.** 1) $a = 2$ или $a = 3$; 2) не существуют. **24.15.** $a_{101} = \dfrac{1}{2}$. *Указание.* Покажите, что $a_{n+6} = a_n$ для любого натурального n. **24.16.** $a_{101} = -1$. **24.17.** *Указание.* Воспользуйтесь методом математической индукции. **24.18.** *Указание.* Доказательство проведите методом математической индукции с шагом 2. **24.22.** 1) $a_n = 2^n - 1$. *Указание.* Выпишите несколько первых членов последовательности и сделайте индуктивное предположение; 2) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; 3) $n^2 - 1$. **24.23.** *Указание.* Докажите, что $a_n = (2n - 1)^2$. **24.24.** *Указание.* $a_{n+2} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + n + 1$. Покажите, что $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1$. Отсюда $a_{n+1}^2 < a_{n+2} < \left(a_{n+1} + 1\right)^2$. **24.25.** $x_1 = 1$ или $x_1 = 2$. *Указание.* Выполнив замену $x_n - 1 = y_n$, получим $y_{n+1} = y_n{}^2$. Тогда $y_{1000} = y_{999}^2 = \ldots = y_1^{2^{999}}$. Отсюда $y_1 = 0$ или $y_1 = 1$. **24.26.** $a \in [-1; 0)$. **24.27.** $(-\infty; -3] \cup [5; +\infty) \cup \{1\}$. **25.4.** 1) Да, $n = 16$; 2) нет. **25.5.** 15. **25.8.** 23. **25.9.** –6. **25.10.** 1) Да, $a_1 = -3$, $d = -6$; 3) нет. **25.11.** 1) Да, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) да, $a_1 = \dfrac{1}{5}$, $d = \dfrac{2}{5}$; 3) нет. **25.13.** 18. **25.14.** 16. **25.15.** –0,6. **25.16.** –6; –4,5; –3; –1,5; 0; 1,5; 3. **25.17.** 2,2; 0,4; –1,4; –3,2. **25.18.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ или $a_1 = 15$, $d = \dfrac{1}{2}$. **25.19.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ или $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **25.20.** Если первый член прогрессии равен её разности или разность прогрессии равна нулю. **25.26.** 60°. **25.32.** При $x = -1$: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; при $x = 8$: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **25.33.** $y = 3$, $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **25.34.** $y = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **25.35.** $x = -1$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **25.36.** 0. **25.40.** 3, 13, 23. *Указание.* Числа p, $p + 10$, $p + 20$, где p — простое число, дают различные остатки при делении на 3. **25.41.** 3, 5, 7. **25.42.** *Указание.* Пусть $a_k = m^2$, $m \in \boldsymbol{N}$. Тогда для $n \geqslant k$ имеем $a_n = m^2 + d(n - 1)$. Покажите, что член с номером $n = 2m + d + 1$ также является квадратом натурального числа. **25.43.** *Указание.* Имеем $a^2 = a + kd$, $k \in \boldsymbol{N}$, $b = a + dm$, $m \in \boldsymbol{N}$. Тогда

$b^2 = a^2 + 2adm + d^2m^2 = a + d(k + 2ma + dm^2)$. **25.44.** *Указание.* Пусть $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_m = a_1 + d(m-1)$ и a_1 — k-значное натуральное число. Выберем m и n так, чтобы $n - 1 = 10^k$, $m - 1 = 10p$, где $p > k$. **25.45.** *Указание.* Пусть множество простых чисел вида $3n + 2$ конечно. Обозначим его элементы p_1, p_2, ..., p_k. Рассмотрите число $3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 2$. **25.46.** Не существует. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что можно указать промежутки натурального ряда любой длины, не содержащие ни одного простого числа. **25.47.** $a = -4$. **25.48.** $\frac{1}{6}$. **26.5.** 156 ударов. **26.6.** 710. **26.7.** 1188. **26.8.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **26.9.** $n(n+1)$. **26.10.** 8; 14; 20. **26.11.** –17. **26.12.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **26.13.** 3. **26.14.** –67,2. **26.15.** 63. **26.16.** 5880. **26.17.** 2112. **26.18.** 1632. **26.19.** 61 376. **26.20.** 70 336. **26.21.** 0,3. **26.22.** 10. **26.23.** 20. **26.24.** 16. **26.25.** Да; 19, 23, 27, 31, 35. **26.26.** Нет. **26.27.** 10 с. **26.28.** 42 страницы. **26.29.** –1976. **26.30.** 348. **26.31.** –10. **26.32.** 10. **26.33.** 690. **26.34.** 250. **26.35.** 1) 12; 2) 26. **26.36.** 1) 10; 2) 69. **26.37.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **26.39.** 2610. **26.40.** 0. **26.41.** $-(m+n)$. **26.42.** 0. *Указание.* Пусть прогрессия содержит $(2n+1)$ членов. Из условия следует, что $\frac{2a_2 + 2d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 2dn}{2} \cdot (n+1)$. Отсюда следует, что $a_1 + dn = 0$. **26.43.** 0. *Указание.* Общее количество игр равно $0{,}5n(n-1)$. Тогда количество очков, набранных всеми командами, равно $n(n-1)$. Пусть последняя команда набрала x очков. Если d — разность прогрессии, тогда количество очков, набранных всеми командами, равно $0{,}5(2x + d(n-1))n$. Получаем уравнение $n(n-1) = 0{,}5(2x + d(n-1))n$. **26.45.** Если $a = -1$, то решений нет; если $a = 1$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a < -1$ или $a > 1$, то $x \leqslant \frac{1}{a+1}$; если $-1 < a < 1$, то $x \geqslant \frac{1}{a+1}$. **27.1.** Да. **27.6.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ или $-\frac{3}{5}$. **27.7.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **27.8.** 6. **27.9.** 9. **27.10.** 30 и 150. **27.11.** 1, 2, 4, 8. **27.12.** Да, $b_1 = \frac{5}{4}$, $q = 4$. **27.13.** $x_1 = 49$, $q = 7$. **27.14.** 1) 15 или –15; 2) $2\sqrt{5}$ или $-2\sqrt{5}$. **27.15.** 6 или –6. **27.16.** 216. **27.17.** 243. **27.21.** 3) Последовательность является геометрической прогрессией, если $q \neq -1$. **27.23.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ или $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 7$, $q = -2$ или $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **27.24.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **27.25.** При $x = 1$ имеем 3, 6, 12; при $x = -14$ имеем –27, –9, –3. **27.26.** При $x = 2$ имеем 8, 4, 2; при $x = -7$ имеем –1, –5, –25. **27.27.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **27.28.** 3, 7, 11. **27.29.** 8, 10, 12 или 17, 10, 3. **27.30.** 5, 15, 45 или 45, 15, 5. **27.31.** 2, 6, 18 или 18, 6, 2. **27.32.** 18, 6, 2 или 2, 6, 18. **27.33.** 2, 4, 8, 12 или $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$,

$\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. **27.34.** 1, 5, 9, 13. **27.35.** $a = 3$. **28.1.** 1) 1456; 2) $155(5+\sqrt{5})$. **28.2.** 762. **28.3.** 1210. **28.4.** –68,2. **28.5.** 27. **28.6.** –7 или 6. **28.7.** 16 ран. **28.8.** 5. **28.9.** 72. **28.10.** $\frac{9}{8}$. **28.11.** 4368. **28.12.** –12 285. **28.13.** $\frac{A}{B}$. **28.15.** $2n + \frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$. **28.16.** 8. **28.17.** 5. **28.19.** $\left(\frac{A}{B}\right)^{50}$. *Указание.* Докажите, что $b_1 \cdot b_{100} = \frac{A}{B}$, далее воспользуйтесь задачей 29.18. **28.21.** Если $a < \frac{11}{4}$, то $x \geqslant \frac{11}{4}$ или $x = a$; если $a \geqslant \frac{11}{4}$, то $x \geqslant a$. **29.1.** 1) $2(\sqrt{2}-1)$; 2) $\frac{9(\sqrt{3}+1)}{2}$. **29.2.** 1) $\frac{3(\sqrt{6}+2)}{2}$; 2) $3\sqrt{2}+4$. **29.5.** 35. **29.6.** $-\frac{1}{12}$. **29.7.** 1) $16+8\sqrt{2}$ или $16-8\sqrt{2}$; 2) 27. **29.8.** 1) 243; 2) 312,5. **29.10.** $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ или $b_1 = 3$, $q = -\frac{1}{2}$. **29.11.** $b_1 = 192$, $q = \frac{1}{4}$. **29.12.** $27+9\sqrt{3}$ или $27-9\sqrt{3}$. **29.13.** $\frac{25(5+\sqrt{5})}{2}$ или $\frac{25(\sqrt{5}-5)}{2}$. **29.14.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) –3. **29.15.** $-\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{4}$. **29.16.** $\frac{2}{5}$. **29.17.** $-\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3}$. **29.18.** $2a^2$. **29.19.** Да. **29.20.** 1) $6R\sqrt{3}$; 2) $R^2\sqrt{3}$; 3) $4\pi R$; 4) $\frac{4}{3}\pi R^2$. **29.21.** 1) $4a(2+\sqrt{2})$; 2) $2a^2$; 3) $\pi a(2+\sqrt{2})$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **29.23.** Рисунок 43. **29.24.** $a = 1$. **29.25.** 1; $-\frac{5}{3}$. **30.1.** 1) $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$; 2) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **30.2.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

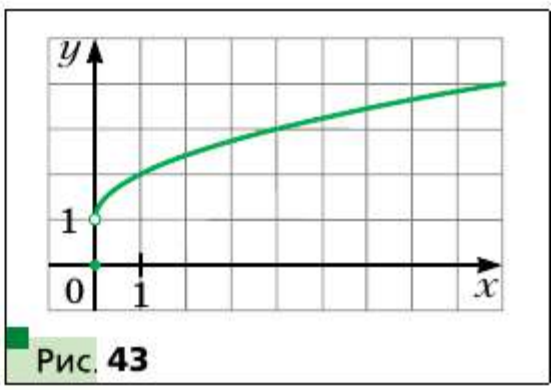


Рис. 43

30.3. $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 5^n}$. **30.4.** $n(n+1)^2 + n(n+1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^n}$. **30.5.** 1) $\frac{10(10^n-1)}{9} - n$; 2) $\frac{50(10^n-1)}{81} - \frac{5n}{9}$. **30.7.** 1) $\frac{n-1}{4n-3}$; 2) $\frac{n(n+2)}{n+1}$; 3) $1 - \frac{1}{(n+1)!}$. *Указание.* $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; 4) $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. *Указание.* $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. **30.8.** 1) $\frac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$. *Указание.* $\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + n$. **30.9.** $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. *Указание.* $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. **30.10.** $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. *Указание.* $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. **30.11.** $S_n = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n-1}{(a-1)^2}$.

Указание. Рассмотрите равенство $aS_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots + n \cdot a^n$. **30.12.** $0 < a < \frac{3}{2}$. **30.13.** 2; 4; –1; $-\frac{1}{2}$.

Глава 6. **31.11.** 5 км/ч, 3 км/ч. **32.20.** $\frac{2\sqrt{a}}{a}$. **33.3.** $\overline{A} = Y$; 2) $A \cup B = T$; 3) $A \cap \overline{B} = Z$. **33.8.** 1) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[0; 2)$; 5) $[2; 4]$. **33.9.** 3) Один из следующих: 0:0, 1:1, 0:1, 0:2, 0:3, 1:2; 4) любой счёт в пользу команды «Локомотив», кроме 2:0; 5) любой счёт. **33.12.** 46 %. **33.13.** 52 %. **33.14.** 0,85. **33.15.** $\frac{2}{3}$. **33.16.** 12 %. **33.17.** 0,8. **33.18.** 0,68. **33.20.** 1) 0,04; 2) 0,02; 3) 0,07; 4) 0,06. **33.21.** 1) 45 %; 2) 5 %; 3) 15 %; 4) 20 %. **34.3.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) 0. **34.4.** $\frac{1}{8}$. **34.7.** 1) 0,1; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{6}$. **34.8.** 1) 0,5; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{41}{70}$. **34.11.** $\frac{7}{24}$. **34.12.** $\frac{6}{7}$. **34.13.** 21 %. **34.15.** 1) $\frac{2}{3}$; 4) 1. **34.16.** 1) 0,6; 4) 0,6. **34.17.** 87 %. **34.18.** 36 %. **34.19.** Нет. *Указание.* Если A и B — несовместные и независимые события, то $0 = p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$. **34.21.** 1) 5,6 %; 2) 14,4 %; 3) 33,6 %; 4) 46,8 %; 5) 22,4 %; 6) 33,2 %; 7) 38,8 %. **34.22.** 1) 51,2 %; 2) 38,4 %; 3) 9,6 %; 4) 0,8 %. **34.23.** 1) 2,56 %; 2) 65,61 %; 3) 7,29 %; 4) 29,16 %. **35.5.** $\frac{1}{2}$. **35.6.** $\frac{3}{35}$. **35.9.** 2) 0.98; 3) 0,51. **35.10.** 2) 75,5 %; 3) 64 %. **35.11.** $\frac{2}{5}$. *Указание.* Проведём прямую l, перпендикулярную данным прямым. Не нарушая общности, можно считать, что центр монеты попадает на прямую. **35.12.** $\frac{3}{4}$. **35.13.** $\frac{3}{4}$. **35.14.** $\frac{4}{9}$. **36.5.** $C_5^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 3\,\%$. **36.6.** $C_7^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 16\,\%$. **36.7.** $C_{12}^5 p^5 (1-p)^7$. **36.8.** $C_{25}^3 p^3 (1-p)^{22}$. **36.9.** $C_7^5 0{,}9^5 0{,}1^2 \approx 12\,\%$. **36.10.** $C_6^2 0{,}05^2 0{,}95^4 \approx 3\,\%$. **36.11.** $C_7^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx$ $\approx 26\,\%$. **36.12.** $C_r^k\left(\frac{n}{n+m}\right)^k\left(\frac{m}{n+m}\right)^{r-k}$. **38.13.** $C_n^k\left(\frac{1}{r}\right)^k\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-k}$. **36.14.** $C_6^5 0{,}61^5 0{,}39 + 0{,}61^6 \approx 25\,\%$. **36.15.** $1 - (C_{20}^1 0{,}07 \cdot 0{,}93^{19} + 0{,}93^{20}) \approx 41\,\%$. **36.16.** $C_{30}^{28} 0{,}95^{28} 0{,}05^2 + C_{30}^{29} 0{,}95^{29} 0{,}05 + 0{,}95^{30} \approx 81\,\%$. **37.4.** 2) 0,05; 3) 0; 4) 0,5. **37.5.** Нет. **37.6.** 3) $\frac{1}{30}$. **37.7.** 3) 35 %; 4) 34 %; 5) 69 %. **37.8.** 1) 0,13; 2) 0,56; 3) 1; 4) 0,43. **37.9.**

Значение x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

37.11.

Значение x	1	2	3	4
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

37.12.

Значение x	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

37.13.

Значение x	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

38.1. 3,64. **38.2.** 1,96. **38.3.** 2. **38.4.** $\frac{126}{19}$. **38.7.** 150 р. **38.8.** 0,5. **38.9.** 3,5. **38.10.** 2,92.

Указания к упражнениям рассказа «Эффективные приёмы доказательства неравенств»

Неравенства (1), (2) и (3) — это неравенства из рассказа «Эффективные приёмы доказательства неравенств».

1. *Указание*. I способ. Воспользуйтесь неравенством (1). II способ. Воспользуйтесь неравенством (3). **3.** *Указание*. Воспользуйтесь неравенством (2). **4.** *Указание*. $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}=\frac{(x^2)^2}{yx}+\frac{(y^2)^2}{zy}+\frac{(z^2)^2}{xz}$. **5.** *Указание*. I способ. Воспользуйтесь неравенством (3). II способ. $\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}=$ $=\frac{1}{9}\left(\frac{(3a)^2}{b+2c}+\frac{(3b)^2}{c+2a}+\frac{(3c)^2}{a+2b}\right)$. Далее воспользуйтесь неравенством (1).

6. *Указание*. I способ. $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}=\frac{(a^2)^2}{ab+ac}+\frac{(b^2)^2}{bc+ba}+\frac{(c^2)^2}{ca+cb}$. Да-

лее воспользуйтесь неравенством (3). II способ. $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}=$ $=\frac{1}{4}\left(\frac{(2a^2)^2}{ab+ac}+\frac{(2b^2)^2}{bc+ba}+\frac{(2c^2)^2}{ca+cb}\right)$. Далее воспользуйтесь неравенством (1). **8.** *Указание.* $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}=\frac{1^2}{1+ab}+\frac{1^2}{1+bc}+\frac{1^2}{1+ac}$. Далее воспользуйтесь неравенством (3). **9.** *Указание.* Левую часть неравенства представьте в виде $\frac{x^2}{x^2+2yx+3zx}+\frac{y^2}{y^2+2zy+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$. Далее воспользуйтесь неравенством (3) и неравенством $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$. **11.** *Указание.* Воспользовавшись задачей 18.17 (1), можно записать, что $(x+1)(y+1)=xy+1+x+y\geqslant 2(x+y)$. **12.** *Указание.* На основании задачи 18.17 (1) и условия $x\in[0;1]$ можно записать, что $\frac{x}{2+yz}=$ $=\frac{x}{1+yz+1}\leqslant\frac{x}{1+y+z}\leqslant\frac{x}{x+y+z}$. **14.** *Указание.* Воспользовавшись задачей 18.13, можно записать, что $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{1}{a^2b+b^2a+abc}=$ $=\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$. **15.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 18.13. **16.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 18.13. **17.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 18.19. **18.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 18.22. **19.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 18.25. **20.** *Указание.* Воспользовавшись задачей 18.29 (1), можно записать: $\frac{1}{\sqrt{1}}<2\sqrt{1}-2\sqrt{0}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2\sqrt{1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$; ...; $\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$. **21.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 18.29 (2).

Алфавитно-предметный указатель

Аналитический способ задания функции 7
Аргумент функции 4

Вероятностная модель 334
Вершина параболы 40
Взаимно обратные функции 200
— однозначное отображение множества X на множество Y 6
Выборка 283
— репрезентативная 283

Гармонический ряд 271
Генеральная совокупность 283
Геометрическое определение вероятности 328
Гистограмма 284
График числовой функции 8
— уравнения первой степени с двумя переменными 105
— неравенства с двумя переменными 148

Дендрограммы 318
Диаграмма круговая 286
— рассеивания 286
Дискретная случайная величина 340
Дисперсия 299
— случайной величины 350
Дополнение события 311
Дробная часть числа 6

Значение функции 5
— — в точке 5
— — наибольшее 24
— — наименьшее 24
Знаменатель геометрической прогрессии 257

Корень арифметический n-ой степени из неотрицательного числа 206
— кубический 205
— n-ой степени из числа 204

Математическое ожидание случайной величины 348
Медиана 297
Мера центральной тенденции 298
Метод Монте-Карло 333
— применения ранее доказанного неравенства 167
— — очевидного неравенства 166
— разности 165
— рассуждения от противного 166
— упрощения неравенства 165
Многочлен однородный 128
— симметрический 130
— — элементарный 130
Множество значений случайной величины 339
— симметричное относительно начала координат 32
Мода 295

Начальные условия 235
Неравенство квадратное 80
— ключевое 184
— Коши-Буняковского 177
— Коши для двух чисел 173
— линейное с двумя переменными 150
Несовместные события 306
Нуль функции 18

Область значений функции 5
Область определения функции 4
Объединение событий 307
Отклонения 298
Открытая полуплоскость 148
Относительная частота 296
Отображение множества X на множество Y 5

Парабола 40
Переменная зависимая 4
— независимая 4
Пересечение событий 308
Подкоренное выражение 205
Последовательность бесконечная 233
— конечная 233
— стационарная 234
— сходящаяся 269
— числовая 232
Предел последовательности 268
Прогрессия арифметическая 243
— геометрическая 257
Проект 358
Промежуток возрастания (убывания) 20
— знакопостоянства 19

Равносильные системы уравнений 118
Радикал 205
Размах 297
Разность арифметической прогрессии 243
Распределение Бернулли 342
— биномиальное 342
— вероятностей случайной величины 340
— геометрическое 343
Растяжение графика 39, 41
Решающие правила 294
Решение неравенства 148
— уравнения 105

Сбор данных 285
Сжатие графика 39, 41
Сигнум 7
Следствие системы уравнений 119
Случайная величина 339, 343
Случайное распределение вероятностей случайной величины 341
лучайные выбросы 298
События зависимые 321
— независимые 321
Среднее арифметическое 172
— гармоническое 172
— геометрическое 172
— квадратичное 172
— квадратичное отклонение 299
Статистика 282
Степень положительного числа с рациональным показателем 222
Столбчатая диаграмма 284
Схема Бернулли с параметрами 334

Уравнение первой степени с двумя переменными 105
Условная вероятность 317

Формула полной вероятности 323
— n-ого члена 233, 244, 256
— рекуррентная 235
— суммы n первых членов 252, 265
Функция 4, 18
— возрастающая 19, 20
— Дирихле 6
— квадратичная 67

— кусочно заданная 7
— нечетная 31
— обратимая 198
— периодическая 10
— сложная 7
— убывающая 19, 20
— четная 31
— числовая 5

Целая часть числа 6

Частотная таблица 295
Частоты 295
Члены последовательности 232

Оглавление

Глава **1.** **Квадратичная функция**

§ **1.** Функция **4**
• *Из истории развития понятия функции* **15**
§ **2.** Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции **18**
§ **3.** Чётные и нечётные функции **31**
§ **4.** Построение графиков функций $y = kf(x)$, $y = f(kx)$ **37**
§ **5.** Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$ **46**
§ **6.** Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$ **61**
§ **7.** Квадратичная функция, её график и свойства **67**
§ **8.** Решение квадратных неравенств **80**
§ **9.** Решение неравенств методом интервалов **88**
• *Парабола* **98**
Итоги главы 1 ..... **103**

Глава **2.** **Уравнения с двумя переменными и их системы**

§ **10.** Уравнение с двумя переменными и его график **105**
§ **11.** Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными **113**
§ **12.** Решение систем уравнений с двумя переменными методом подстановки и методами сложения и умножения **118**
§ **13.** Метод замены переменных и другие способы решения систем уравнений с двумя переменными **127**
§ **14.** Системы уравнений (неравенств) как математические модели реальных ситуаций **138**
Итоги главы 2 ..... **146**

Глава **3.** **Неравенства с двумя переменными и их системы. Доказательство неравенств**

§ **15.** Неравенства с двумя переменными **148**
§ **16.** Системы неравенств с двумя переменными **155**
§ **17.** Основные методы доказательства неравенств **164**
§ **18.** Неравенства между средними величинами. Неравенство Коши – Буняковского **172**
• *Эффективные приёмы доказательства неравенств* ... **184**
Итоги главы 3 ..... **191**

Глава **4.** **Степенная функция**

§ **19.** Степенная функция с натуральным показателем **192**
§ **20.** Обратная функция **197**
§ **21.** Определение корня n-й степени **204**
§ **22.** Свойства корня n-й степени **211**

§ **23.** Степень с рациональным показателем и её свойства **221**
Итоги главы 4 ..... **231**

Глава **5. Числовые последовательности**

§ **24.** Числовые последовательности **232**
• *О кроликах, подсолнухах, сосновых шишках и золотом сечении* **239**
§ **25.** Арифметическая прогрессия **243**
§ **26.** Сумма n первых членов арифметической прогрессии **251**
§ **27.** Геометрическая прогрессия **256**
§ **28.** Сумма n первых членов геометрической прогрессии **264**
§ **29.** Представление о пределе последовательности. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше единицы **268**
§ **30.** Суммирование **276**
Итоги главы 5 ..... **281**

Глава **6. Элементы статистики и теории вероятностей**

§ **31.** Начальные сведения о статистике **282**
§ **32.** Статистические характеристики **294**
§ **33.** Операции над событиями **306**
§ **34.** Зависимые и независимые события **316**
§ **35.** Геометрическая вероятность **327**
• *Метод Монте-Карло* **331**
§ **36.** Схема Бернулли **333**
§ **37.** Случайные величины **339**
§ **38.** Характеристики случайной величины. Представление о законе больших чисел **347**
Итоги главы 6 ..... **357**

Проектная работа **358**
Дружим с компьютером **362**
Ответы и указания **365**
Указания к упражнениям рассказа «Эффективные приёмы доказательства неравенств» **393**